TD 0 : Ensembles et relations d'équivalences

Exercice 1. Démontrer que l'intersection de deux relations d'équivalence sur un même ensemble E est encore une relation d'équivalence, mais que l'union de deux relations d'équivalence n'en est pas forcément une.

Exercice 2. [Factorisation d'une application]

Soit $f : E \to F$ une application.

(a) Montrer que la relation binaire $\sim$ définie sur E par $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence.

(b) Montrer que pour $\pi : E \to E/\sim$ la projection canonique, il existe une unique application $\overline{f} : E/\sim \to F$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$, et que celle-ci est injective. En déduire que $E/\sim$ est en bijection avec $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 3. [Fonctions injectives et surjectives] Soit $f : E \to F$ une application.

(a) Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes applications $g, h : G \to E$, on a $f \circ g = f \circ h$ si et seulement si $g = h$.

(b) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toutes applications $g, h : F \to G$, on a $g \circ f = h \circ f$ si et seulement $g = h$.

(c) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie X de E, $f^{-1}(f(X)) = X$.

(d) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie Y de F, $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

(e) Montrer que si la composée $g \circ h$ est surjective (resp. injective) alors g est surjective (resp. h est injective).

(f) Montrer que f est injective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

(g) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

(h) Montrer que toute fonction f peut s'écrire comme composée $f = g \circ h$, où g est surjective et h injective, ou comme composée $f = g \circ h$ où g est injective et h surjective.

Exercice 4. [Bijections naturelles]

(a) Pour tout ensemble E, donner une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0, 1\}^E$.

(b) Pour tous ensembles E et F, donner une bijection entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{P}(F))$.

Exercice 5. [Théorème de Cantor]

Soit E un ensemble quelconque.

(a) Si E est fini de cardinal n, quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$? En déduire qu'ils ne peuvent être en bijection.

(b) Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application quelconque. On note

$$F = \{x \in E | x \notin f(x)\}.$$

Montrer que F n'est l'image d'aucun élément de E par f.

(c) En déduire qu'il n'existe aucune surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$, en particulier aucune bijection.

Exercice 6. [Morphismes entre les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$] Soient m et n deux entiers naturels non nuls, avec $\pi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\pi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ les projections canoniques.

(a) Montrer qu'un morphisme de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ se factorise en $f = \overline{f} \circ \pi_n$ si et seulement si $n \cdot f(1) = 0$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(b) En déduire quels sont les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et leur nombre, en fonction de m et n.

Exercice 7. [Espaces vectoriels quotients]

Soit E un k-espace vectoriel, avec k un corps commutatif et F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Montrer que la relation binaire $\sim$ définie sur E par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$ est une relation d'équivalence, on note son quotient E/F.

(b) Montrer que le quotient E/F a une unique structure de k-espace vectoriel telle que la projection canonique $\pi : E \to E/F$ est une application linéaire.

(c) Si G est un supplémentaire de F dans E, montrer qu'il existe un isomorphisme linéaire entre G et E/F. En déduire la dimension de E/F lorsque E est de dimension finie.

(d) Pour toute application linéaire $f : E \to E'$, montrer que f se factorise en $f = \overline{f} \circ \pi$ si et seulement si f est nulle sur F.

Exercice 8. [Construction de $\mathbb{R}$]

Soit E l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$, et $\mathcal{R}$ la relation sur E telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $\mathbb{Q}$ s'injecte naturellement dans l'espace quotient $E/\mathcal{R}$.

(b) Montrer que $E/\mathcal{R}$ a naturellement une structure de corps commutatif.

(c) Si E est muni de la topologie de la convergence uniforme, montrer que $E/\mathcal{R}$ muni de la topologie induite est un espace topologique séparé, qui admet une métrique naturelle pour laquelle il est complet et tel que $\mathbb{Q}$ est dense dans $E/\mathcal{R}$.

Exercice 9. [Théorème de Cantor-Bernstein *]

Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Le but de cet exercice est de démontrer que E et F peuvent être mis en bijection.

(a) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties C de E telles que $g(F\backslash f(C)) \subset E\backslash C$. Montrer qu'il est non vide, et que l'union E_0 des éléments de $\mathcal{E}$ appartient également à $\mathcal{E}$.

(b) On pose maintenant $E_1 = E\backslash g(F\backslash f(E_0))$. Montrer que $E_0 \subset E_1$.

(c) Pour $y \in F$ tel que $g(y) \in E_1$, montrer que $y \in f(E_0)$ donc $y \in f(E_1)$. En déduire que $E_1 \in \mathcal{E}$, puis que $E_0 = E_1$.

(d) On introduit la fonction $h : E \to F$, qui à x associe $f(x)$ si $x \in E_0$, et $g^{-1}(x)$ (l'unique antécédent de x par g) si $x \notin E_0$. Montrer que h est bien définie.

(e) Montrer que h est surjective.

(f) Montrer que h est injective, et en déduire que E et F sont en bijection.