Devoir maison 1

Exercice 1

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour un élément $g \in G$, on note $N_X(g)$ le nombre de points fixes de g dans X :

$$N_X(g) = \mathrm{Card}\{x \in X : g \cdot x = x\}.$$

1. Montrer que si $x, y \in X$ sont dans la même orbite, alors les stabilisateurs de x et y ont même cardinal.
2. Montrer que lorsque g parcourt G, la moyenne du nombre de points fixes de g dans X est égale au nombre d'orbites de l'action, *i. e.*

$$\frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{g \in G} N_X(g) = \mathrm{Card}\, \Omega$$

   où Ω désigne l'ensemble des orbites de l'action de G sur X.
3. On suppose que l'action de G sur X est transitive, et que $\mathrm{Card}(X) \geq 2$. Déduire de la question précédente qu'il existe un élément $g \in G$ agissant sans point fixe sur X.

Exercice 2

Soit k un corps. Dans cet exercice, on étudie le *groupe affine* $\mathrm{Aff}(k)$ de k, défini comme l'ensemble des applications $g : k \to k$ de la forme $g(x) = ax + b$ avec $a \in k^\times$ et $b \in k$.

1. Montrer que $(\mathrm{Aff}(k), \circ)$ est un groupe.
2. Montrer que $\mathrm{Aff}(k)$ agit fidèlement et transitivement sur k.
3. Montrer que l'on a une suite exacte courte de groupes

$$1 \to k \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Aff}(k) \xrightarrow{\beta} k^\times \to 1$$

   (on définira précisément les morphismes de groupes α et β).
4. Cette suite exacte est-elle scindée ?
5. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Aff}(k) &\to \mathrm{GL}_2(k) \\ (x \mapsto ax + b) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   est bien définie et est un morphisme de groupes injectif.

Dans la suite, on pourra identifier $\mathrm{Aff}(k)$ à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(k)$ au moyen de ϕ.

6. Montrer que les classes de conjugaison de $\mathrm{Aff}(k)$ sont données par les ensembles suivants :

- $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$;
- $\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in k^\times\right\}$;
- pour chaque $a \in F - \{0, 1\}$, l'ensemble $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in k\right\}$.

On suppose désormais que k est le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où p est un nombre premier.

7. Soit $\chi : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ un morphisme de groupes. Montrer que l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \chi(a)$ définit un caractère linéaire de $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.
8. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ possède exactement $p-1$ représentations irréductibles de dimension 1, et une représentation irréductible de dimension $p-1$.

Soit V l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$. On fait agir $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sur V par $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$.

9. Montrer que V est une représentation de G.
10. Montrer que V se décompose en somme directe de sous-représentations $D \oplus W$, où D (resp. W) est de dimension 1 (resp. $p-1$).
11. Calculer le caractère de W.
12. Montrer que W est irréductible, et en déduire la liste des représentations irréductibles de $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ à isomorphisme près.