TD N°9 : ANNEAUX ET POLYNÔMES

Dans ce TD tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires, et les anneaux factoriels (principaux, euclidiens) sont supposés intègres.

Exercice 1. [Questions diverses]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau factoriel (respectivement principal, euclidien) vérifie-t-il la même propriété ?
2. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K et $P \in A[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que toute racine de P appartenant à K appartient en fait à A.
3. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, l'élément 2 est irréductible mais n'est pas premier.
4. Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que si n est sans facteur carré, alors l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ n'est pas factoriel.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien.
6. Soit K un corps. Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/(X^3 - Y^2 - X)$ n'est pas factoriel.
   (*Indication : Montrer que l'élément Y est irréductible mais que l'idéal qu'il engendre n'est pas premier.*)

Exercice 2. [L'anneau des fonctions holomorphes]

Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe.

1. Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est un anneau intègre et déterminer son corps des fractions, et identifier les éléments inversibles.
2. Montrer qu'un élément $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est irréductible si et seulement s'il admet un seul zéro et que celui-ci est de plus un zéro simple. En déduire que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est pas factoriel.

Exercice 3. [Théorème de deux carrés]

1. Montrer que l'anneau des entiers de Gauss, $\mathbb{Z}[i]$, est un anneau euclidien lorsque l'on prend pour stathme l'application $\mathcal{N} : x \mapsto x\bar{x}$. En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer que pour tous entiers non-nuls m, n, on a : $\mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}}(m, n) = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[i]}(m, n)$.
3. Montrer que tout entier premier p, ou bien p est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$, ou bien il existe un élément irréductible $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $p = \mathcal{N}(\pi)$.
4. Montrer que pour tout élément irréductible $\pi \in \mathbb{Z}[i]$, $\mathcal{N}(\pi)$ est soit un nombre premier, soit le carré d'un nombre premier.
5. En déduire que pour tout entier premier p, les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $p = n^2 + m^2$;
   (b) p n'est pas un élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$;
   (c) (-1) est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
6. Déterminer l'ensemble des nombres premiers qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers. En déduire l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 4. [Un anneau principal non euclidien]

Soit $\alpha := \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. L'objectif de cet exercice est de prouver que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal mais non euclidien.

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
2. On note N l'application envoyant un élément de $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ sur le carré de son module complexe.

(a) A l'aide de l'application N, déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

(b) Montrer que si B est un anneau euclidien, il contient un élément b non inversible tel que la restriction à $B^\times \cup \{0\}$ de la projection naturelle $B \to B/(b)$ soit encore surjective.
(*Indication : Lorsque B n'est pas un corps, on pourra considérer un élément de stathme minimal.*)

(c) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux non-nul de $\mathbb{Z}[\alpha]$ vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque n vaut 2 ou 3.

(d) En conclure que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas euclidien.

3. Montrer que pour tous éléments $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$ avec $b \neq 0$, il existe alors une paire (q, r) d'éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$ telle que :
   - $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$;
   - $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$.
4. Montrer que l'idéal de $\mathbb{Z}[\alpha]$ engendré par 2 est maximal.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal.
(*Indication : On pourra s'inspirer de la démonstration donnée pour les anneaux euclidiens.*)

Exercice 5. [Localisation d'un anneau intègre]

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. Si S est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0, on pose

$$S^{-1}A := \left\{ \frac{a}{s},\ a \in A,\ s \in S \right\} .$$

1. Montrer que $S^{-1}A$ est un sous-anneau intègre de K.
2. Soit $\phi : A \to S^{-1}A$ l'inclusion canonique. Montrer qu'elle vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux $f : A \to R$ qui envoie les éléments de S sur des éléments inversibles, il existe un unique morphisme d'anneaux $f' : S^{-1}A \to R$ tel que $f = f' \circ \phi$.
3. Quels sont les idéaux premiers de A dont l'image par ϕ reste un idéal premier ?
4. Montrer que l'application $I \mapsto \phi^{-1}(I)$ définit une injection des idéaux de $S^{-1}A$ vers ceux de A, qui envoie les idéaux premiers sur des idéaux premiers.
5. Soit $\mathcal{I}(A, S)$ l'ensemble des idéaux de A disjoints avec S. Montrer que si I est un élément maximal de $\mathcal{I}(A, S)$, alors I est un idéal premier. En déduire une autre démonstration de l'Exercice 3.d) du TD 8.
6. Montrer que si A est principal (respectivement factoriel), alors $S^{-1}A$ est principal (respectivement factoriel).
7. En déduire que $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est un anneau principal.
8. Montrer que si A est euclidien de stathme ν, alors $S^{-1}A$ est euclidien de stathme μ défini par

$$\mu(x) := \inf_{\substack{s \in S \\ sx \in A}} \nu(sx) .$$

Exercice 6. Soient X un espace topologique compact (i.e. quasi-compact et séparé) et $R = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues. Soit $\mu : X \to \operatorname{MaxSpec} R$ (où $\operatorname{MaxSpec} R$ est l'ensemble des idéaux maximaux de R) l'application qui à un point x de X associe l'idéal m_x des fonctions s'annulant en x.

1. Vérifier que m_x est bien un idéal maximal.
2. Montrer que μ est injective en utilisant le lemme d'Urysohn.
3. Soit m un idéal maximal de R. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $m = m_x$, et en déduire que μ est surjective.
(*Indication : soit $V(m)$ l'ensemble des zéros communs des éléments de m, montrer que $V(m)$ est non-vide en utilisant la compacité de X.*)
4. Pour tout $f \in R$, on note $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ et $V_f = \{m \in \operatorname{MaxSpec} R | f \notin m\}$. Montrer que $\mu(U_f) = V_f$.