TD n°8 : Anneaux, idéaux et modules

Exercice 1. [Questions diverses]

Soit A un anneau.

(a Supposons que pour tout $a \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ différent de 1 tel que $a^n = a$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

(b) Si $a \in A$ est nilpotent, montrer que $1 + a$ est inversible dans A.

Exercice 2. [Anneaux de valuation discrète]

Soit K un corps. Une *valuation discrète* sur K est une fonction surjective $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tous $x, y \in K^*$:

$$v(xy) = v(x) + v(y) \quad \text{et} \quad v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)).$$

(a) Donner pour $K = \mathbb{Q}$ et tout premier p, une valuation discrète v_p sur $\mathbb{Q}$ telle que $v_p(p) = 1$.

(b) Montrer qu'à toute valuation discrète sur K, on peut associer une distance d *ultramétrique* sur K, c'est-à-dire telle que pour tous $x, y, z \in K$:

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Comment s'intersectent les boules pour cette distance ? Calculer, pour la valuation v_2 du (a) et la distance correspondante, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$.

(c) Montrer que pour un corps K muni d'une valuation discrète v, $A := \{x \in K | v(x) \geq 0\}$ est un anneau tel que $A^* = v^{-1}(0)$. Un anneau ainsi obtenu est appelé *anneau de valuation discrète.* Dire quels sont les anneaux ainsi obtenus pour les exemples du (a).

(d) Pour un anneau de valuation discrète A, une *uniformisante de* A est un élément π de A de valuation 1. Montrer que tout élément de A s'écrit de manière unique $a = \pi^n u$ avec $u \in A^*$. En déduire que les idéaux de A sont exactement les idéaux de la forme $(\pi^n), n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. [Radical]

Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0).

(a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.

(b) Donner les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}[X]$.

(c) Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I, le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I.

(d) *(Bonus)* Montrer en utilisant le lemme de Zorn que ces inclusions sont des égalités.

Exercice 4. [Spectre d'un anneau]

Pour tout anneau A, on note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des ses idéaux premiers. Pour tout idéal I de A et $V \subset \operatorname{Spec} A$, on note

$$\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | I \subset \mathfrak{p}\} \qquad \mathcal{I}(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}.$$

(a) Montrer que les fonctions $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$ sont décroissantes pour l'inclusion, et que pour tous idéaux I et J de A

$$\mathcal{V}(I \cup J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J).$$

(b) Montrer que pour toute famille d'idéaux $(I_\alpha)_\alpha$ de A et I l'idéal engendré par leur union,

$$\mathcal{V}(I) = \cap_\alpha \mathcal{V}(I_\alpha).$$

(c) Montrer grâce à la question (d) de l'exercice 3 que pour tout idéal I de A,

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

(d) Dessiner $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5. [Supplémentaire d'un sous-module]

Soit N un sous-module du A-module M.

(a) Montrer qu'il n'existe pas forcément de sous-module N' de M tel que $M = N \oplus N'$.

(b) Montrer que l'existence d'un supplémentaire est équivalente au fait que la suite exacte de modules

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\subset} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

est scindée, c'est-à-dire qu'il existe $f : M/N \to M$ telle que $\pi \circ f = \mathrm{Id}_{M/N}$.

Exercice 6. [Dimension d'un anneau]

Sur un anneau A, une chaîne de longueur n est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n.$$

On appelle dimension de Krull la borne supérieure des longeurs de chaînes de A (pouvant être infinie).

(a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est de dimension 1, et que tout corps K est de dimension 0.

(b) Montrer que pour tout corps K et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim K[X_1, \cdots, X_n] \geq n$. Trouver un anneau de dimension infinie.

(c) Montrer que pour un idéal I de A, $\dim A/I \leq \dim A$.

Exercice 7. [Lemme du serpent]

On rappelle que pour un morphisme $f : M \to N$, le conoyau de f est défini par $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$.

(a) Montrer que tout carré commutatif de A-modules

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle d'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d} \\ N' & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

on a des applications induites naturelles $\operatorname{Ker} d' \to \operatorname{Ker} d$ et $\operatorname{Coker} d' \to \operatorname{Coker} d$.

(b) Soit un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle d'}\big\downarrow & & {\scriptstyle d}\big\downarrow & & {\scriptstyle d''}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow[h]{} & N & \xrightarrow[k]{} & N'' & & \end{array}$$

Montrer qu'avec les applications définies dans le (a), il existe $\delta : \operatorname{Ker} d'' \to \operatorname{Coker} d'$ telle que la suite

$$\operatorname{Ker} d' \longrightarrow \operatorname{Ker} d \longrightarrow \operatorname{Ker} d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} d' \longrightarrow \operatorname{Coker} d \longrightarrow \operatorname{Coker} d''$$

(*Bonus*) Faire le dessin du diagramme commutatif complet pour comprendre le nom de "lemme du serpent".