ÉNS Lyon Algèbre 1
L3 2014-2015

TD n°7 : Anneaux et idéaux

Exercice 1. [Mise en jambes sur les morphismes d'anneaux...]

1. Soit A un anneau. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$, $\mathbb{Z}[X] \to A$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe abélien noté additivement. Montrer que l'ensemble A des morphismes de groupes $G \to G$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. A quel anneau classique est-il isomorphe lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 1$ entier ?

Exercice 2. Soit K un corps et soit $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$ une suite exacte de K-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que l'on a l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim_K E_i = 0 \ .$$

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$.

1. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $(a) = A$.
2. Montrer que a est un diviseur de b dans A si et seulement si $(b) \subset (a)$.
3. Supposons que A soit intègre.
   (a) Montrer que a et b sont associés dans A si et seulement si $(a) = (b)$.
   (b) Montrer que a est premier dans A si et seulement si (a) est un idéal premier de A.
   (c) Montrer que a est irréductible dans A si et seulement si (a) est maximal parmi les idéaux principaux de A. En déduire que lorsque A est principal, a est irréductible dans A si et seulement si (a) est un idéal maximal de A.
4. Soit $e \in A$ un élément vérifiant $e^2 = e$. Montrer qu'alors $A = eA \oplus (1-e)A$ en tant que A-algèbres.

Exercice 4. Soit A un anneau intègre.

1. Montrer que les éléments inversibles de $A[X]$ sont les constantes inversibles dans A.
2. Montrer que tout élément irréductible de A est irréductible dans $A[X]$.
3. Si K est un corps, décrire les idéaux de l'anneau quotient $K[X]/(X^2)$.
4. Exhiber un élément inversible de degré non nul dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 5. Soit A un anneau commutatif.

1. Soient I et J deux idéaux de A premiers entre eux. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, les idéaux I^n et J^n sont premiers entre eux.
2. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que pour toute famille finie $\{I_1, \dots, I_n\}$ d'idéaux de A vérifiant $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n \subset \mathfrak{p}$, il existe un entier $k \in \{1, \dots n\}$ tel que $I_k \subset \mathfrak{p}$.
3. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux premiers de A. Supposons que I soit un idéal de A contenu dans $\bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que I soit inclus dans $\mathfrak{p}_k$.

4. Soit I un idéal non premier de A. Montrer qu'il existe des idéaux $I_1 \neq I_2$ de A distincts de I et de A tels que l'on ait $I_1 I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2$.

Exercice 6. Un *anneau local* est un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal.

1. Un corps est-il un anneau local ?
2. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) A est un anneau local ;
   (b) le complémentaire de $A^\times$ dans A est un idéal de A ;
   (c) pour tout élément $x \in A$, x ou $1 - x$ est un élément inversible de A ;
   (d) la somme de deux éléments non inversibles de A est encore un élément non inversible de A.
3. Montrer que le quotient d'un anneau local par un idéal propre est encore un anneau local.
4. Soit p un nombre premier, montrer que $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, p \not| \, b\}$ est un anneau local. Quel est son idéal maximal ?

Exercice 7. [Notion de module projectif]
Soit A un anneau et P un A-module.

1. Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Montrer que la suite suivante est une suite exacte de groupes abéliens :
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M') \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(P, M'') \ . \qquad (1)$$
2. Montrer que l'équivalence des deux assertions suivantes :
   (a) pour toute suite exacte courte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, l'application $\mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, M'')$ qui apparaît dans la suite exacte (1) est surjective ;
   (b) pour tout morphisme de A-modules $f : P \to N$ et tout morphisme surjectif de A-modules $\varphi : M \twoheadrightarrow N$, il existe un morphisme de A-modules $\tilde{f} : P \to M$ tel que $f = \varphi \circ \tilde{f}$.

   Un A-module P satisfaisant à ces conditions est appelé un A-module *projectif.*
3. Trouver un exemple de module projectif et un exemple de module non projectif.

Exercice 8. [Algèbre d'un groupe]
Soit K un corps et G un groupe. Notons $K[G]$ l'espace vectoriel sur K ayant pour base $\{e_g, \ g \in G\}$.

1. Montrer que $K[G]$ est muni d'une structure d'anneau unitaire pour la multiplication suivante :
$$(\sum_{g \in G} a_g e_g) \cdot (\sum_{h \in G} b_h e_h) := \sum_{g,h \in G} a_g b_h e_{gh} \ .$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur G pour que l'anneau $K[G]$ soit commutatif.
3. Quel est le centre de $K[G]$?
4. Montrer que toute représentation K-linéaire (V, ρ) de G muni V d'une structure de $K[G]$-module à gauche et que tout morphisme de représentations est alors un morphisme de $K[G]$-modules.
5. Inversement, montrer que pour tout $K[G]$-module V, le groupe abélien V possède une structure de K-espace vectoriel et que l'application $G \times V \ni (g, v) \mapsto e_g.v \in V$ est une représentation K-linéaire de G sur V. Montrer alors que tout morphisme de $K[G]$-module induit un morphisme de représentations.
6. Montrer que les deux constructions précédentes sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, les notions de représentations K-linéaires de G et de $K[G]$-modules sont équivalentes.