ÉNS Lyon | Algèbre 1
L3 | 2014-2015

TD n°6 : Caractères et représentations, suite

Dans tout le TD, G est un groupe fini. Les représentations sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soient V et W deux représentations irréductibles de G et $\phi_0 : V \to W$ une application linéaire. Soit $\phi : V \to W$ l'application définie par

$$\phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \phi_0(g^{-1} \cdot v).$$

Montrer que $\phi = 0$ si V et W ne sont pas isomorphes, et si $V = W$, ϕ est la multiplication par $\mathrm{Tr}(\phi_0)/\dim(V)$.

Exercice 2. [Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$]

1. Calculer les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.
2. Calculer le caractère de la signature et celui de la représentation standard.
3. Ecrire la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.
4. Calculer les classes de conjugaison du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$, et exhiber ses caractères linéaires. En déduire la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.
5. Comparer les deux tables et établir un lien entre les caractères irréductibles des deux groupes.

Exercice 3. [Groupes non abéliens d'ordre 8]

1. Rappeler les classes de conjugaison du groupe dihédral D_8 et ses caractères linéaires. En déduire sa table de caractères.
2. Notons $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $k = ij = -ji$. Calculer ses classes de conjugaison et son groupe dérivé.
3. Montrer que H_8 possède quatre caractères linéaires distincts. En déduire sa table de caractères. La comparer avec celle de D_8.
4. Montrer que les deux groupes D_8 et H_8 ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. Soit V une représentation de G. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : V \otimes V &\to V \otimes V \\ a \otimes b &\mapsto b \otimes a \end{aligned}$$

Soient $S^2V = ker(\sigma - id)$ et $\Lambda^2 V = ker(\sigma + id)$.

1. Montrer que σ est un morphisme de représentations de G.
2. Montrer qu'on a une décomposition $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$ comme représentation de G, et calculer la dimension de ces deux sous-espaces.
3. Pour tout $g \in G$, exprimer les valeurs propres de g dans $\Lambda^2 V$ en fonction de ses valeurs propres dans V. En déduire une formule pour le caractère de $\Lambda^2 V$.
4. Trouver une formule pour le caractère de S^2V.

Exercice 5. [Table de caractères de $\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5$]

1. Calculer les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$, le caractère de la signature et celui de la représentation standard. On note V la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$.

2. Calculer le caractère de la représentation $\Lambda^2 V$ et montrer que celle-ci est irréductible.
3. Compléter la table des caractères de $\mathfrak{S}_5$.
4. Trouver la table des caractères de $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 6. [Représentations induites]

Soit H un sous-groupe de G. Toute représentation V de G peut être vue comme une représentation de H par restriction à H, et on la note $Res_H^G(V)$.

Soit (W, ρ) une représentation de H de caractère χ_W. On note V l'espace des fonctions $f : G \to W$ telles que pour tout $h \in H$ et $x \in G$, $f(hx) = h \cdot f(x)$.

1. (a) Montrer que V est une représentation de G de manière naturelle. On note $Ind_H^G(W)$ ou $Ind_H^G(\rho)$ cette représentation, appelée représentation induite de H.
   (*Indication : considérer l'action de G sur les fonctions par $g \cdot f(x) = f(xg^{-1})$.*)
   (b) Interpréter $Ind_H^G(1)$, la représentation induite de la représentation triviale.
   (c) Décomposer les représentations induites des représentations irréductibles de H dans les cas suivants :
      i. $G = D_{2n}$ est le groupe dihédral et H est le sous-groupe des rotations ;
      ii. $G = \mathfrak{S}_4$ et $H = \mathfrak{A}_4$ (respectivement $G = \mathfrak{S}_5$ et $H = \mathfrak{A}_5$).
2. (a) Montrer que si K est un sous-groupe de H, alors $Ind_K^G = Ind_H^G \circ Ind_K^H$.
   (b) Montrer que si U est une représentation de G, alors $U \otimes Ind_H^G(W) = Ind_H^G(Res_H^G(U) \otimes W)$ comme représentation de G.
3. Soit $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ un système de représentants de classes à droites dans $H \setminus G$. On note W_{g_i} le sous-espace de V formé des fonctions qui sont nulles en dehors de Hg_i.
   (a) Montrer qu'on a une décomposition $V = \oplus_{i=1}^n W_{g_i}$, et que l'action de G sur V permute les W_{g_i} via l'action de G sur $H \setminus G$ par $g \cdot Hx = Hxg^{-1}$. En déduire la dimension de $Ind_H^G(W)$.
   (b) Montrer la formule
   $$\chi_{Ind_H^G(W)}(g) = \sum_{g_i g g_i^{-1} \in H} \chi_W(g_i g g_i^{-1}).$$
   (c) Soit C une classe de conjugaison de G telle que $C \cap H$ se décompose en classes de conjugaison $D_1, D_2, \cdots, D_r$ de H. Montrer la formule
   $$\chi_{Ind_H^G(W)}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W(D_i).$$
4. Soit U une représentation de G.
   (a) Montrer que pour tout morphisme de H-modules $W \to U$ s'étend de manière unique en un morphisme de G-modules $V \to U$; autrement dit on a une identification canonique
   $$Hom_H(W, Res_H^G(U)) = Hom_G(Ind_H^G(W), U).$$
   (b) En déduire la formule (réciprocité de Frobenius)
   $$\langle \chi_W, \chi_{Res_H^G(U)} \rangle_H = \langle \chi_{Ind_H^G(W)}, \chi_U \rangle_G.$$
   (c) Pour tout $s \in G$, on note H_s le sous-groupe $H \cap sHs^{-1}$ de H, et ρ_s la représentation de H_s définie par $\rho_s(x) = \rho(s^{-1}xs)$ pour tout $x \in H_s$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
      i. La représentation induite $Ind_H^G(\rho)$ est irréductible ;
      ii. La représentation ρ est irréductible, et pour tout $s \in G \setminus H$, les représentations ρ_s et $Res_{H_s}^H(\rho)$ sont orthogonales.