TD n°5 : Caractères et représentations

Exercice 1. Soit V une représentation de G dont la décomposition en représentations irréductibles est
$$V = V_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus n_r}$$
Montrer que $\mathrm{End}_G(V) \simeq \prod_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{C})$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini.

(a) Montrer que tout caractère χ d'une représentation V de G vérifie $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.

(b) Montrer que si tout élément de G est conjugué à son inverse, tous les caractères de G sont à valeurs réelles.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, les seuls caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$ sont le caractère trivial et la signature.

(d) Le groupe alterné admet-il d'autres caractères linéaires que le caractère trivial ? Si oui, dans quels cas ?

Exercice 3. [Groupe diédral] Pour $n \geq 1$, on note D_{2n} le groupe des isométries du n-gone régulier formé par les racines n-ièmes de l'unité dans le plan complexe. On note r la rotation d'angle $2\pi/n$ de centre 0 et s la symétrie par l'axe des abscisses.

(a) Montrer que tout élément de D_{2n} est soit une rotation de la forme $r^k, 0 \leq k \leq n-1$, soit une symétrie orthogonale, et donc de la forme $sr^k, 0 \leq k \leq n-1$. En déduire que le groupe est de cardinal $2n$.

(b) Montrer que $sr^ks = r^{-k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et que toutes les symétries sont conjuguées dans D_{2n}.

(c) En déduire que D_{2n} a exactement $n/2 + 3$ classes de conjugaison si n est pair, et $(n+3)/2$ classes si n est impair, et les donner.

(d) Montrer que pour n impair, les deux seuls caractères linéaires de D_{2n} sont le caractère trivial et le déterminant.

(e) Montrer que pour n pair, D_{2n} a exactement quatre caractères linéaires, et les donner.

(f) Notons $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$. Pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on définit la représentation ρ_k sur $\mathbb{C}^2$ par ses valeurs en r et s :
$$\rho_k(r) = \begin{pmatrix} \zeta_n^k & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-k} \end{pmatrix} \quad \rho_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que c'est bien une représentation et calculer le caractère correspondant.

(g) Montrer que ρ_k et ρ_{n-k} sont isomorphes.

(h) Lorsque n est pair, que dire de $\rho_{n/2}$? Montrer que ρ_k est irréductible dans tous les autres cas.

(i) Montrer qu'on a ainsi obtenu toutes les représentations irréductibles de D_{2n}.

Exercice 4. Dans cet exercice, on note G un groupe fini et $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(a) (*Rappel du TD 4 exercice 9*)Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) On admet que tout groupe abélien fini est un produit de groupes cycliques. Montrer que pour tout groupe abélien, $\widehat{G}$ est isomorphe à G.

(c) Si G est abélien, donner un isomorphisme canonique entre G et $\widehat{\widehat{G}}$.

On rappelle que le groupe dérivé $D(G)$ de G est le groupe engendré par ses commutateurs (TD 2, exercice 7).

(d) Pour G quelconque, montrer que $\widehat{G} \simeq G/D(G)$, et que $\widehat{\widehat{G}}$ n'est pas isomorphe à G si G n'est pas abélien.

(e) Pour G quelconque, montrer que le groupe dérivé est exactement l'intersection des noyaux des caractères linéaires de G dans $\mathbb{C}^*$.

(f) (*Bonus*) Montrer que tout groupe abélien fini est un produit de groupes cycliques.

Exercice 5. [Représentations fidèles]

Soit G un groupe fini. On rappelle qu'une représentation de G est ***fidèle*** si son noyau est trivial.

(a) Montrer que G admet une représentation fidèle,

(b) Soit V une représentation de caractère χ. Montrer que le noyau de V est constitué des $g \in G$ tels que $\chi(g) = \dim V$. En déduire un critère pour que V soit fidèle.

(c) Montrer que si G admet une représentation irréductible fidèle, son centre est cyclique.

Les questions suivantes visent à démontrer un critère de simplicité de G en fonction des représentations fidèles.

(d) Montrer que si H est distingué dans G et $(V, \overline{\rho})$ une représentation fidèle irréductible de G/H, la représentation (V, ρ) de G est irréductible de noyau H, avec ρ définie par $\rho(g) = \overline{\rho}(\overline{g})$.

(e) Montrer que l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de G est triviale.

(f) En déduire que tout sous-groupe distingué de G s'écrit comme une intersection de noyaux de ses représentations irréductibles.

(g) Montrer que G est simple si et seulement si toutes ses représentations irréductibles non triviales sont fidèles ssi pour tout caractère irréductible $\chi \neq 1$ de G et tout $g \neq e$, $\chi(g) \neq \chi(e)$.

Exercice 6. [La représentation standard]

Soit $n \geq 2$, on note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ a une représentation naturelle dans $\mathbb{C}^n$, définie par

$$\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}.$$

On appelle représentation standard de $\mathfrak{S}_n$ la sous-représentation formée par l'hyperplan H de coordonnées

$$x_1 + \cdots + x_n = 0.$$

et on note χ_{std} son caractère.

En utilisant la formule de Burnside (Exercice 6 du TD 2), démontrer que la représentation standard est irréductible.

Exercice 7. [Bonus sur les représentations fidèles] Soit V une représentation fidèle de G de caractère χ et φ un caractère irréductible de G. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V^{\otimes n}$ contient la représentation irréductible associée à φ.

(a) Montrer que la seule classe de conjugaison pour laquelle $\chi(C) = \dim V$ est $C = \{e\}$.

(b) Démontrer que pour tout n,

$$\langle \varphi, \chi^n \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| \overline{\varphi(C)} \chi(C)^n.$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des classes de conjugaison de G.

(c) En déduire l'égalité de séries génératrices :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \varphi, \chi^n \rangle T^n = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{|C| \overline{\varphi(C)}}{1 - \chi(C) T}$$

(d) Montrer par l'absurde qu'il existe n tel que $\langle \varphi, \chi^n \rangle \neq 0$. Conclure.