ÉNS Lyon — Algèbre 1
L3 — 2014-2015

TD n°4 : Groupes symétriques et représentations de groupes

Exercice 1.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ et qu'ils engendrent $\mathfrak{A}_n$.
3. Soit G un groupe abélien. Montrer que pour $n \geq 5$, tout morphisme $\mathfrak{A}_n \to G$ est trivial, et que tout morphisme $\mathfrak{S}_n \to G$ a pour image un groupe d'ordre au plus 2.
4. *(Si vous connaissez la notion de groupes résolubles)* En déduire que pour $n \geq 5$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$ ne sont pas résolubles.

Exercice 2. [Simplicité de $\mathfrak{A}_n$] Le but de cet exercice est de montrer que $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \neq 1, 2, 4$. On choisit donc H un sous-groupe distingué de H non trivial.

1. Traiter les cas $n = 1, 2, 3$ et 4. On suppose désormais $n \geq 5$.
2. Montrer qu'il suffit de prouver que H contient un 3-cycle.
3. Soit $\sigma \in H, \sigma \neq \mathrm{id}$ une permutation ayant un nombre maximal de points fixes. Soit τ un 3-cycle. On considère $\sigma' = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Montrer que $\sigma' \in H$ et en déduire que σ est :
   - soit un produit de deux transpositions. Écrivons $\sigma = (ab)(cd)$ et choisissons $e \notin \{a, b, c, d\}$.
   - soit un cycle de longueur 5. Écrivons $\sigma = (abcde)$.
   - soit un produit d'au plus deux 3-cycles.
4. En choisissant $\tau = (cde)$, montrer que dans tous les cas, H contient un 3-cycle.

Exercice 3. [Groupe des isométries du tétraèdre] Notons G le groupe des isométries de l'espace euclidien de dimension 3 laissant globalement invariant l'ensemble des sommets d'un tétraèdre régulier centré en l'origine.

1. Démontrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
   Indication : Considérez l'action de G sur l'ensemble des sommets du tétraèdre.
2. Déterminer l'image par cet isomorphisme :
   (a) d'une transposition ;
   (b) d'un 3-cycle ;
   (c) du sous-groupe des isométries directes.

Exercice 4. [Automorphismes de $\mathfrak{S}_6$]

1. Soit k un corps. On note $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$ la droite projective sur k. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(k)$. Pour $x \in \mathbb{P}^1(k)$, on pose $M.x = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec les conventions $M.\infty = \frac{a}{c}$ et $M.\frac{-d}{c} = \infty$. Montrer que l'on a ainsi défini une action fidèle et transitive de $\mathrm{PGL}_2(k)$ sur $\mathbb{P}^1(k)$.
2. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ s'identifie à un sous groupe H de $\mathfrak{S}_6$. Comment H agit-il sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$?
3. Montrer que $\mathfrak{S}_6$ possède un automorphisme qui n'est pas intérieur (un tel automorphisme est appelé extérieur).
4. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 5. Qu'est-ce qu'une représentation linéaire du monoïde $\mathbb{N}$? Quelle théorie retrouvez-vous ? En particulier, que sont les représentations irréductibles ? les représentations semi-simples ?

Exercice 6. Soit V une représentation irréductible d'un groupe G sur un corps k. Montrer que $\mathrm{End}_G(V)$ est un corps non nécessairement commutatif. Que dire de plus si k est algébriquement clos ?

Exercice 7. Soit G un groupe fini.

1. Montrer que G est abélien si et seulement si toutes ses représentations complexes irréductibles sont de dimension 1. Quelles sont les dimensions possibles des représentations réelles irréductibles ?
2. On suppose que G possède un sous-groupe abélien d'indice n. Montrer que les représentations complexes irréductibles de G sont de dimensions inférieures ou égales à n.

Exercice 8. [Représentations de $\mathfrak{S}_3$] Soit (V, ρ) une représentation complexe $\mathfrak{S}_3$. Notons $\tau := (123)$ et $\sigma := (12)$ dans $\mathfrak{S}_3$.

1. Notons respectivement V_0, V_1 et V_2 les espaces propres de $\rho(\tau) \in GL(V)$ pour les valeurs propres $1, j$ et j^2 (où $j \in \mathbb{C}$ est une racine primitive troisième de l'unité). Montrer que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est égal à la somme directe $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$.
2. Montrer que V_0 est stable sous l'action de σ, que $\sigma \cdot V_1$ est inclus dans V_2 et que $\sigma \cdot V_2$ est inclus dans V_1.
3. Montrer que pour tout $x \in V_1 \backslash \{0\}$, le sous-espace de V engendré par les vecteurs x et $\sigma \cdot x$ définit une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de x.
4. En déduire la liste des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 9. [Transformée de Fourier dans un groupe cyclique]

1. Soient $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et ζ une racine primitive n-eme de l'unité. Montrer que les caractères linéaires de G sont les $\chi_j : m \mapsto \zeta^{jm}$. Autrement dit, on a un isomorphisme $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une application quelconque. On pose $\hat{f}(q) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\chi_{-q}(k)$. Montrer que
$$f(k) = \sum_{q=0}^{n-1} \hat{f}(q)\chi_q(k) \qquad \text{et que} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2 = \sum_{q=0}^{n-1} |\hat{f}(q)|^2$$
3. Soient $f, g : G \to \mathbb{C}$ deux applications quelconques. On définit leur produit de convolution par la formule $(f * g)(k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\substack{i,j \in G \\ i+j=k}} f(i)g(j)$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Exercice 10. Notons $\rho : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le morphisme de groupes défini par
$$\forall\ \bar{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \rho(\bar{n}) := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que la représentation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ainsi définie n'est ni irréductible, ni somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 11. Soit $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$.

1. Quelles sont les dimensions des représentations complexes irréductibles de $\mathbb{H}_8$?
2. Montrer que $\mathbb{H}_8$ possède une représentation réelle irréductible V de dimension 4 et calculer $\mathrm{End}(V)$.