TD n°2 : Sous-groupes distingués, actions de groupes

Exercice 1. [Échauffement]

1. Donner des exemples de sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ainsi que les groupes quotients associés.
2. Donner une action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, en déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \sim \mathfrak{S}_3$.
3. Pour un groupe de 35 éléments agissant sur un ensemble de 19 éléments sans point fixe, montrer que l'action a exactement trois orbites.
4. Montrer que si un groupe G ne contient qu'un seul sous-groupe d'ordre n, ce dernier est distingué dans G.
5. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 3$.
6. On considère l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$ définie par $\theta \cdot z = e^{i\theta} z$. Donner les orbites de cette action.
7. Soit $n \geq 1$ entier, on note μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}^*$. En considérant l'application $z \mapsto z^n$, montrer que $\mathbb{C}^*/\mu_n \sim \mathbb{C}^*$.

Exercice 2. [Sous-groupes d'un quotient, rappels de cours]

Soit G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. On note $\pi : G \to G/N$ la projection.

(a) Montrer que pour tout sous-groupe H de G contenant N, $\pi(H)$ est un sous-groupe de G/N (noté H/N), et que les images directes par π de deux sous-groupes distincts sont distinctes.

(b) En déduire que la projection π définit une bijection entre les sous-groupes de G contenant N et les sous-groupes de G/N.

(c) Montrer que si H est distingué dans G et contient N, alors H/N est distingué dans G/N, et que $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

(d) Pour K un sous-groupe quelconque de G, montrer que $N \cap K$ est distingué dans K, que NK est un sous-groupe de G et que $NK/N \cong K/N \cap K$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier.

Soit E un ensemble de cardinal a. On fait opérer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à gauche sur E^p par l'action

$$\overline{k} \cdot (e_1, \cdots, e_p) = (e_{\omega(k+1)}, \cdots, e_{\omega(k+p)}).$$

où $\omega(i)$ est le représentant dans $\{1, \cdots, p\}$ de la classe de i modulo p.

(a) (*Petit théorème de Fermat*) En utilisant la formule des classes, montrer que $a^p \cong a \mod p$.

(b) (*Théorème de Cauchy*) En adaptant la preuve du (a), montrer que tout groupe fini G de cardinal divisible par p admet un élément d'ordre p.

Exercice 4. [Action par homographies et espace projectif] Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

(a) Montrer que la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

définit bien une action de groupes a gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.

(b) Calculer le stabilisateur de i. Cette action est-elle fidèle ? transitive ?

Exercice 5. [Centre d'un p-groupe]

Soit p un nombre premier et G un p-groupe, de cardinal p^α.

(a) (*Cours*) Montrer en utilisant l'équation aux classes que le centre de G n'est pas trivial.

(b) En déduire par récurrence que G contient pour tout $i \in \{0, \cdots, \alpha\}$, un sous-groupe distingué d'ordre p^i.

(c) Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est toujours abélien.

Exercice 6. [Formule de Burnside] Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note, pour tout $g \in G$, $f(g)$ le nombre de points de X fixés par g.

(a) Démontrer que

$$\sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)| = \sum_{g \in G} f(g).$$

(b) En déduire la formule de Burnside, à savoir

$$\text{Nombres d'orbites de l'action} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

(c) Si G agit transitivement sur X ayant au moins deux éléments, prouver qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe. En déduire que l'union des conjugués d'un sous-groupe strict de G n'est pas G tout entier.

(d) (*Plus difficile*) En appliquant la formule de Burnside, prouver que si $|X| \geq 2$, on a

$$\sum_{g \in G} f(g)^2 \geq 2|G|.$$

(e) (*Plus difficile*) On suppose désormais également que G agit transitivement sur X, et on note G_0 l'ensemble des éléments de G ne fixant aucun point de X. Prouver l'encadrement

$$|G| \leq \sum_{g \in G} (f(g) - 1)(f(g) - |X|) \leq |X||G_0|$$

et en déduire que $|G_0| \geq |G|/|X|$.

Exercice 7. [Groupe dérivé] Soit G un groupe. On appelle groupe dérivé de G le groupe $D(G)$ engendré par les $aba^{-1}b^{-1}, a, b \in G$.

(a) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G. Le groupe quotient $G/D(G)$ est appelé *abélianisé* de G.

(b) On note $\pi : G \to G/D(G)$ le morphisme quotient. Étant donné un groupe abélien H et un morphisme de groupes $f : G \to H$, montrer qu'il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/D(G) \to H$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$.

Exercice 8. [Groupes résolubles] Un groupe G (fini) est dit résoluble s'il existe une suite $G_i, i \in \{0, \cdots, n\}$ de sous-groupes de G telle que

$$G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

et que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, le groupe G_i est distingué dans G_{i+1} et le quotient G_{i+1}/G_i est abélien.

(a) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.

(b) Montrer que pour tout sous-groupe distingué H de G, G est résoluble si et seulement si H et G/H le sont.

(c) Avec l'aide de l'exercice 4, montrer que tout p-groupe est résoluble.

(d) Soit la suite $D^n(G)$ définie par $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$ (où D désigne le groupe dérivé). Montrer que G est résoluble si et seulement si cette suite descend jusqu'à $\{1\}$.