TD N°12 : MODULES DE TYPE FINI, SUITE

Dans ce TD tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Exercice 1. [La caractéristique d'un anneau] Soit A un anneau.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Z} \to A$. On appelle la **caractéristique** de l'anneau A l'unique générateur positif de l'idéal $\ker \varphi$.
2. Montrer que si A est intègre, alors sa caractéristique est soit nulle, soit un entier premier. Plus généralement, montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors la caractéristique de B est un diviseur dans $\mathbb{Z}$ de la caractéristique de A.

Exercice 2. [Sur le théorème de structure]

1. Soient G un groupe abélien fini et p un nombre premier. Montrer que le nombre de sous-groupes de G d'ordre p coïncide avec le nombre de sous-groupes d'indice p.
2. Soient A un anneau fini et p le plus petit facteur premier de $n = |A|$. Montrer que si $I_1, \cdots I_k$ sont des idéaux de A tels que $I_i + I_j = A$ pour tout $i \neq j$, alors $k \leqslant \log_p n$.
   (*Indication : Montrer que* $n^{k-1} \leqslant |I_1| \cdots |I_k| \leqslant (n/p)^k$.)

Exercice 3. [Un analogue du théorème de structure sur les anneaux noethériens]

1. Soient A un anneau et M un A-module non nul. Pour tout $x \in M \setminus \{0\}$, son **annulateur** est l'idéal $\{a \in A | ax = 0\}$ de A. Montrer que si I est un idéal de A qui est maximal parmi les annulateurs des éléments de M, alors I est premier.
2. Soient A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Montrer qu'il existe une suite finie croissante de sous-modules de M

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$$

   telle que $M_{i+1}/M_i \simeq A/P_i$, où P_i est un idéal premier.

Exercice 4. [Calculer la forme normale et la base adaptée]

1. Déterminer la forme normale de Smith des matrices suivantes en précisant l'anneau A des coefficients :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} X+4 & 2 \\ 2X-4 & X+1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit M le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^4$ engendré par les vecteurs $(2,0,2,2)$, $(0,6,6,6)$ et $(-4,0,2,2)$.
   (a) Décrire la structure du $\mathbb{Z}$-module quotient $\mathbb{Z}^4/M$.
   (b) Déterminer une base de $\mathbb{Z}^4$ adaptée à M.
3. Soit N le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^4$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

   (a) Décrire la structure du $\mathbb{Z}$-module quotient Z^4/N.

(b) Déterminer une base de $\mathbb{Z}^4$ adaptée à N.

4. Soit P le sous-$\mathbb{Q}[X]$-module de $\mathbb{Q}[X]^3$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3X-1 & -2X & 3X-1 \\ X^2-1 & 0 & 2X^2-2 \\ X^2-11X+3 & 7X & 2X^2-11X+2 \end{pmatrix}.$$

Sans nécessairement fournir de base adaptée, décrire la structure du module quotient $\mathbb{Q}[X]^3/P$.

Exercice 5. [Quand est-ce que les sous-anneaux sont noethériens]

1. Soient A, B deux anneaux commutatifs unitaires. Montrer que tout morphisme d'anneaux $f : A \to B$ définit sur B une structure de A-module.
2. Soit A un sous-anneau de B tel que A est un facteur direct du A-module B (i.e. $B = A \oplus C$ comme A-module). Montrer que si B est noethérien, alors A aussi.
3. Un anneau **gradué** est un anneau A muni d'une décomposition en sous-groupes abéliens

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$$

tel que $A_i A_j \subset A_{i+j}$ pour tout $i, j \geqslant 0$. Montrer que A est noethérien si et seulement si A_0 est un anneau noethérien et l'idéal $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ est de type fini.

Exercice 6. [Modules projectifs]

Soit A un anneau. On dit qu'un A-module P est **projectif** s'il vérifie la propriété suivante : pour toute surjection $s : M \to N$ de A-modules et toute application $g : P \to N$, il existe une application $f : P \to M$ tell que $g = sf$.[1]

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[ld, dashed, "\exists f"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "s"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1. Montrer qu'un module libre est projectif.
2. Montrer qu'un facteur direct d'un module libre est projectif.
3. Réciproquement, montrer qu'un module projectif est un facteur direct d'un module libre.
4. Montrer que tout module projectif de type fini sur un anneau principal ou un anneau local est libre.
5. Soient $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, et $I = (3, 1+\sqrt{-5})$, $J = (3, 1-\sqrt{-5})$ deux idéaux.
   (a) Montrer que $I + J = A$ et $I \cap J = IJ = (3)$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite exacte de A-modules

$$0 \to I \cap J \to I \oplus J \to A \to 0.$$

   En déduire que I et J sont des A-modules projectifs non libres.

Exercice 7. [Le groupe K_0][2]

Soit A un anneau. On note $K_0(A)$ le groupe abélien libre engendré par les symboles $[P]$ où P est un A-module projectif de type fini, modulo la relation suivante : si on a une suite exacte

$$0 \to P \to R \to Q \to 0$$

de A-modules, alors $[R] = [P] + [Q]$.

1. Montrer qu'il existe un morphisme injectif canonique de groupes abéliens $\mathbb{Z} \to K_0(A)$, qui est un isomorphisme si A est un anneau principal ou un anneau local.
2. Si I est un idéal de A, montrer qu'il existe un morphisme de groupes abéliens $K_0(A) \to K_0(A/I)$. En déduire que $\mathbb{Z}$ est un facteur direct de $K_0(A)$.
3. Montrer que si I est un idéal nilpotent, alors $K_0(A) \simeq K_0(A/I)$.

1. cf. TD 7 Exercice 7.
2. Le groupe K_0 porte aussi le nom du groupe de Grothendieck (1928-2014).