TD n°11 : Modules de type fini

Exercice 1. [Échauffement]
Soit A un anneau intègre qui n'est pas un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver :

1. Une famille libre de taille n de A^n qui n'est pas une base.
2. Une famille génératrice minimale de A^n qui n'est pas libre si A est noethérien et non local.
3. Si A n'est pas principal, un sous-module de A^n qui n'est pas libre.

Exercice 2. [Lemme de Nakayama]
Soit M un A-module de type fini. On veut démontrer que si $M \subset IM + N$ pour un idéal I de A et un sous-module N de M, alors il existe $a \in I$ tel que $(1+a)M \subset N$.

(a) Montrer qu'il suffit de démontrer le résultat pour $N = 0$.

(b) Supposons que $M \subset IM$. Montrer par récurrence sur le nombre minimal de générateurs de M qu'il existe $a \in I$ tel que $(1+a)M = 0$.

(c) Dans le cas où A est un anneau local (ayant pour seul idéal maximal $\mathfrak{m}$), montrer que si $M \subset \mathfrak{m}M + N$, alors $M = N$. En déduire que pour module M de type fini sur A, le relèvement d'une famille génératrice de $M/\mathfrak{m}M$ est une famille génératrice de M.

(d) Montrer que pour A quelconque et M de type fini, un endomorphisme f de M est surjectif si et seulement si il est bijectif, et f^{-1} est alors un polynôme en f. (*Indication : considérer M comme un $A[X]$-module avec f*). Est-ce vrai si on remplace "surjectif" par "injectif" ?

(e) Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si A^m et A^n sont isomorphes en tant que A-modules, alors $m = n$.

Exercice 3. [Idéaux premiers minimaux] Soit A un anneau noethérien.

(a) Montrer que pour tout idéal I de A, il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$.

(b) En déduire que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux pour l'inclusion.

Exercice 4. [Formes k-linéaires alternées] Soit M un A-module libre de rang n. et $k \in \mathbb{N}$.
Une forme k-linéaire alternée sur M est une application $f : M^k \to A$ qui est A-linéaire en chaque variable, et telle que si pour si $m_i = m_j$ pour un certain $i \neq j$,

$$f(m_1, \cdots, m_k) = 0.$$

(a) Montrer que toute forme k-linéaire alternée est antisymétrique, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$,

$$f(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) f(m_1, \cdots, m_k).$$

Montrer que la réciproque est vraie si 2 n'est pas diviseur de zéro dans A.

(b) Montrer que l'ensemble des formes k-linéaires alternées sur M est un A-module libre de dimension $\binom{n}{k}$ si $k \in [0, n]$ et nul si $k > n$.

Exercice 5. [Matrices compagnons] Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in A[X]$. Montrer que la matrice $X \cdot I_n - C_P \in M_n(A[X])$, avec la matrice compagnon

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est équivalente dans $M_n(A[X])$ à la matrice diagonale de coefficients $(P, 1, \cdots, 1)$.

Exercice 6. [repris du TD 10] Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ? En donner si possible un idéal maximal.

1. Le sous-anneau $A \subset \mathbb{C}(X)$ constitué des fractions rationnelles sans pôle sur le cercle unité.
2. L'anneau des séries entières à rayon de convergence strictement positif.
3. L'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.
4. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.
5. L'anneau des suites à coefficients entiers sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soient $A \subset B$ des anneaux avec A noethérien. On dit que $b \in B$ est entier sur A si et seulement si il est annulé par un polynôme unitaire à coefficients dans A.

(a) Montrer que $b \in B$ est entier sur A si et seulement si $A[b]$ est un A-module de type fini.

(b) En déduire que l'ensemble des éléments de B entiers sur A forme un anneau contenant A.

On dit que B est entier sur A si chacun des ses éléments l'est.

(c) Montrer que, pour un anneau C contenant B, si C est entier sur B et B entier sur A, alors C est entier sur A.

(d) En déduire que pour tout corps K contenant $\mathbb{Q}$, l'anneau $\mathcal{O}_K$ des éléments de K entiers sur $\mathbb{Z}$ est intégralement clos, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autres éléments de K entiers sur $\mathcal{O}_K$ que $\mathcal{O}_K$.

Exercice 8. On suppose ici que A est un anneau unitaire, pas forcément commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(A)$.

(a) Pour $n = 1$, montrer que celui-ci est le centre de A^*.

(b) Pour $n \geq 2$, calculer les produits à gauche et à droite d'une matrice M par une transvection. En déduire que le centre de $\mathrm{GL}_n(A)$ est constitué des matrices scalaires $\lambda\,\mathrm{Id}$, avec $\lambda \in Z(A^*)$.

Exercice 9. [Algèbres de type fini sur les anneaux noethériens]

Soient $A \subset B \subset C$ des anneaux tels que A est noethérien et que C est à la fois une A-algèbre finiment engendrée et un B-module de type fini.

(a) Soient $x_1, \cdots, x_m$ des générateurs de C comme A-algèbre et $y_1, \cdots, y_n$ des générateurs de C comme B-module. Construire un anneau noethérien B_0, finiment engendré en tant que A-algèbre, tel que $A \subset B_0 \subset B$ et tel que le B_0-module engendré par $y_1, \cdots, y_n$ contient à la fois les $x_1, \cdots, x_m$ et les $y_i y_j$.

(b) Montrer que C est un B_0-module de type fini. En déduire que B est un B_0-module de type fini, puis que B est finiment engendré en tant que A-algèbre.

(c) En appliquant ce résultat, montrer que si k est un corps et E une k-algèbre finiment engendrée, alors E est un corps si et seulement si E est une extension finie de k.

(d) En déduire que les seules $\mathbb{Z}$-algèbres finiment engendrées qui sont des corps sont les corps finis.