TD n°10 : Anneaux noethériens et polynômes

Exercice 1. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme primitif à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et soit p un entier premier ne divisant pas a_n.

1. Montrer que si la réduction modulo p du polynôme $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Supposons que pour tout p ne divisant pas a_n, la réduction modulo p n'est pas irréductible. Peut-on en déduire que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 2. [Critère d'Eisenstein]

1. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$ un polynôme à coefficients dans A. Supposons qu'il existe un élément irréductible $p \in A$ tel que :
   i) p ne divise pas a_n ;
   ii) pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, p divise a_k ;
   iii) p^2 ne divise pas a_0.
   Montrer qu'alors P est irréductible dans $K[X]$, et qu'il l'est aussi dans $A[X]$ si l'on suppose de plus que P est primitif.
2. Si p est un nombre premier, montrer l'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$ du polynôme $\Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$.
3. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Montrer que le polynôme $\sum X_i^2 - 1$ est irréductible dans $K[X_1, \ldots, X_n]$.
4. Soit K un corps de caractéristique $\neq 3$. Montrer que le polynôme $X^3 + Y^3 - 1$ est irréductible dans $K[X, Y]$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\tilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\tilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.
3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Montrer que I/pI est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?

Exercice 4. [Généralités sur les anneaux noethériens]

1. Soit A un sous anneau d'un anneau noethérien, A est-il noethérien ?
2. Supposons $A[X]$ noethérien. A est-il noethérien ?
3. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout élément s'écrit comme produit d'irréductibles.

Exercice 5. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ?

1. Le sous anneau $A \subset \mathbb{C}(X)$ constitué des fractions rationnelles sans pôles sur le cercle $|z| = 1$.
2. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence strictement positif.
3. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence infini.
4. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{n}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \subset I$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux.
3. *Bonus : en utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal.*

Exercice 7.

1. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout idéal s'écrit comme intersection finie d'idéaux irréductibles, où un idéal I est dit irréductible si $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$ ou $I = I_2$.
2. Soient A un anneau noethérien et I un idéal. On rappelle que $\sqrt{I}$ est l'idéal défini par $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n > 0, x^n \in I\}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $(\sqrt{I})^n \subset I$.

Exercice 8. [Anneaux artiniens] Soit A un anneau. On dit que A est artinien si toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire.

1. Montrer qu'un anneau artinien intègre est un corps et plus généralement que tout idéal premier est maximal.
2. Soient $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$ des idéaux maximaux d'un anneau A tels que $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_n = 0$. Montrer que A est noetherien si et seulement si A est artinien.
3. Soit A un anneau artinien. Montrer que le nilradical est nilpotent.
4. Soit A un anneau artinien. Montrer que A possède un nombre fini d'idéaux maximaux et que leur produit est nul. (On utilisera le fait que le nilradical est l'intersection des idéaux premiers).
5. En déduire qu'un anneau artinien est noethérien. Inversement, montrer qu'un anneau noethérien dans lequel tout idéal premier est maximal est artinien.

Exercice 9. Soit A un anneau factoriel. On suppose que pour tous $a, b \in A$, le pgcd de a et b est donné par une relation de Bézout, c'est à dire qu'il existe u, v tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Le but de cet exercice est de montrer que A est principal.

1. Montrer qu'à association près, tout élément de A ne possède qu'un nombre fini de diviseurs.
2. Soit I un idéal et $a \in I$. Montrer que l'ensemble des suites croissantes d'idéaux principaux de la forme $(a) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \dots (a_n) \subset I$ est finie.
3. En considérant une suite de longueur maximale, montrer que I est principal.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des fonctions de $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ telles que $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour n assez grand et $P = E \cap \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que $P \neq \mathbb{Z}[X]$.
2. Soit $\Delta : E \to E$ l'application telle que $(\Delta f)(n) = f(n) - f(n-1)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $f \in P$
   (b) $\Delta f \in P$
   (c) $\exists n \in \mathbb{N}, \Delta^n f = 0$
   Quel est le plus grand entier d tel que $\Delta^d f \neq 0$?
3. Soit $P_i = \frac{1}{i!}X(X-1)\dots(X-i+1)$. Montrer que (P_i) forme une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[X]$ ainsi qu'une $\mathbb{Z}$-base de P autrement dit telle que tout élément $f \in P$ s'écrit comme une somme $\sum n_i P_i$ avec les $n_i \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que si $f \in P$ est de degré d, alors $d!f \in \mathbb{Z}[X]$ et $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.