DM n°2

Dans tous les énoncés à partir de l'exercice 2, l'anneau A est commutatif unitaire intègre, de corps des fractions K.

Exercice 1. [Lemmes techniques]
Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. Montrer que si $I_1 \cdots I_n \subset \mathfrak{p}$ avec $I_1, \cdots, I_n, \mathfrak{p}$ des idéaux de A et $\mathfrak{p}$ premier, alors un des I_k est inclus dans $\mathfrak{p}$.
2. Supposons que A est noethérien. Montrer que tout idéal de A contient un produit d'idéaux premiers.
3. Montrer que si A est intègre et fini, c'est un corps.
4. Soit B un anneau intègre contenant A. On dit que $b \in B$ est entier sur A s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A. Montrer que b est entier sur A si et seulement si il existe un sous-A-module de type fini de B stable par multiplication par b.
5. En déduire que l'ensemble noté $\overline{A}^B$ des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B contenant A.
6. Pour C un anneau intègre contenant B, montrer que $\overline{\overline{A}^B}^C = \overline{A}^C$.

Ces résultats sont voués à être utilisés au moins une fois dans les exercices suivants, y penser en cas de difficultés.

Exercice 2. [Idéaux généralisés] Un *idéal généralisé* de A est un sous A-module I de K tel que $aI \subset A$ pour un certain $a \in A$ non nul.

1. Montrer que si I, J sont des idéaux généralisés de A, $I + J$ et $I \cdot J$ le sont également (par définition, $I \cdot J$ est le groupe engendré par les produits $ij, i \in I, j \in J$).
2. Pour tout idéal généralisé non nul I, on note $I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subset A\}$.
   Montrer que I^{-1} est un idéal généralisé de A et que $I \cdot I^{-1} \subset A$.
   Si $I \subset J$, montrer que $I^{-1} \supset J^{-1}$.
3. On dit que I est *inversible* s'il existe un idéal généralisé J de A tel que $I \cdot J = A$.
   Montrer que I est inversible si et seulement si $I \cdot I^{-1} = A$, et qu'alors I est un A-module de type fini.
4. Montrer que les idéaux principaux non nuls sont inversibles.
5. Montrer qu'un produit d'idéaux généralisés est inversible si et seulement si chacun d'eux l'est.
6. Montrer que si A est noethérien et tout idéal premier non nul de A est maximal, alors tout idéal propre I de A satisfait la propriété $A \subsetneq I^{-1}$.
7. Montrer que pour $I = (X, Y)$ dans $A = \mathbb{C}[X, Y]$, $I^{-1} = A$.

Exercice 3. L'anneau A est dit de type (I) si et seulement si tout idéal généralisé non nul de A est inversible, et de type (D) si tout idéal non nul de A s'écrit comme produit d'idéaux maximaux (le produit vide étant A par convention).

1. Montrer que les anneaux principaux sont à la fois de type (I) et de type (D).
2. Montrer que $\mathbb{C}[X, Y]$ n'est ni de type (I) ni de type (D) (on rappelle que ses idéaux maximaux sont ceux de la forme $(X - a, Y - b)$).
3. Montrer que si A est de type (I), il est de type (D) et la décomposition en idéaux maximaux est unique.
   Réciproquement, supposons jusqu'à la fin de l'exercice que A est de type (D).

4. Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal.
5. Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ et $a \in \mathfrak{p}$ non nuls, montrer que $\mathfrak{p}$ apparaît dans la décomposition en idéaux premiers de (a). En déduire que $\mathfrak{p}$ est inversible, puis que A est de type (I).
6. Montrer que les anneaux factoriels de type (D) sont principaux.

Exercice 4. [Anneaux d'entiers quadratiques]

Soit $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$ sans facteur carré. On note $K_d = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbb{C}$ et $\mathcal{O}_d = \overline{\mathbb{Z}}^{K_d}$.

1. Pour $\alpha \in K_d$, on appelle polynôme minimal de α, noté P_α, le polynôme unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ tel que l'idéal des polynômes annulant α est engendré par P_α. Montrer que $\alpha \in \mathcal{O}_d$ si et seulement si $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.
2. En déduire, en considérant la multiplication par α dans la $\mathbb{Q}$-base canonique de K_d, que $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathcal{O}_d$ si et seulement si $N(\alpha) = a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$ et $2a \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{d}$ si $d \equiv 2, 3 \mod 4$ et $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ si $d \equiv 1 \mod 4$.
4. Montrer que $\mathcal{O}_d$ est noethérien, et que $\overline{\mathcal{O}_d}^{K_d} = \mathcal{O}_d$.
5. Montrer que tout idéal non nul I de $\mathcal{O}_d$ contient un élément non nul de $\mathbb{Z}$.
6. En déduire que tout idéal premier non nul de I est maximal.
7. En utilisant les questions précédentes et l'exercice 1, montrer que pour un idéal généralisé non nul I de A, si $I \cdot I^{-1} \neq \mathcal{O}_d$, il existe $\lambda \in K_d\backslash\mathcal{O}_d$ tel que $\lambda I^{-1} \subset I^{-1}$. Trouver une contradiction, et conclure que $\mathcal{O}_d$ est de type (I).