DM n°1

Exercice 1. [Noyau d'une représentation]

Montrer que si ρ est une représentation complexe de dimension finie d'un groupe fini G de caractère χ, alors le noyau de ρ est l'ensemble des éléments g de G tels que $\chi(g) = \chi(e)$.

(*Indication : étudier les valeurs propres de* $\rho(g)$.)

Exercice 2. [Centralisateur]

Soit G un groupe. Pour tout sous-ensemble S de G, on note $C_G(S)$ l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que pour tout $s \in S$, $gs = sg$, appelé le **centralisateur** de S dans G. Pour tout $x \in G$ on note $C_G(x)$ le centralisateur du singleton x. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $S \subset S'$ alors $C_G(S) \supset C_G(S')$.
2. $S \subset C_G(S')$ si et seulement si $S' \subset C_G(S)$.
3. $C_G(S)$ est un sous-groupe de G qui contient le centre de G, et $C_G(S) = G$ si et seulement si S est contenu dans le centre de G.
4. $S \subset C_G(C_G(S))$.

On dit qu'un sous-ensemble S de G est **centralement clos** si pour tout $h \in S \setminus \{e\}$, $C_G(h) \subset S$.

Exercice 3. [Complément d'un sous-groupe distingué]

Soient G un groupe et K un sous-groupe de G. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

1. K est distingué dans G, et il existe un sous-groupe H de G tel que $H \cap K = \{e\}$ et que G est engendré par H et K ;
2. K est distingué dans G, et il existe un sous-groupe H de G tel que $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$;
3. Il existe un endomorphisme $\sigma : G \to G$ tel que $\sigma^2 = \sigma$ et $K = \ker \sigma$.

On dit que K est **normal complémenté** s'il est non-trivial, distinct de G et vérifie les conditions précédentes, et que H est un **complément** de K.

Exercice 4.

1. Montrer que si G est un groupe qui possède un sous-groupe normal complémenté centralement clos K, alors G possède un sous-groupe propre non-trivial H tel que pour tout $g \in G \setminus H$, $gHg^{-1} \cap H = \{e\}$.
   (*Indication : étudier le commutateur d'un élément de* K *avec un élément de* H.)
2. Montrer que si de plus G est fini, alors $|H|$ divise $|K| - 1$.
   (*Indication : considérer l'action de* H *sur* K *par conjugaison.*)
3. Montrer que c'est le cas des groupes $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_4$ et exhiber le couple (K, H) correspondant. Est-ce le cas du groupe dihédral D_{2n} ?

Dans les Exercices 5 à 8 on cherche à montrer la réciproque de l'Exercice 4. 1). On suppose que G est un groupe fini qui possède un sous-groupe propre non-trivial H tel que pour tout $g \in G \setminus H$, $gHg^{-1} \cap H = \{e\}$.

Exercice 5.

1. Montrer que deux sous-groupes de G de la forme gHg^{-1} sont soit égaux, soit d'intersection triviale.
2. Exprimer le nombre de sous-groupes distincts de G de la forme gHg^{-1} en fonction des cardinaux de H et de G.

3. Soient $K' = G \setminus (\cup_{g\in G} gHg^{-1})$ et $K = K' \cup \{e\}$. Montrer que K est centralement clos et calculer son cardinal.
4. Montrer qu'il y a exactement deux sortes de classes de conjugaison dans G :
   - d'une part, celles qui sont contenues dans K ;
   - d'autre part, les ensembles de la forme $\cup_{g\in G} gcg^{-1}$, où c est une classe de conjugaison dans H.

On note $R(G)$ l'espace vectoriel des fonctions centrales $f : G \to \mathbb{C}$, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$. On considérera aussi les fonctions centrales sur H, et on remplace G par H dans les notations.

Exercice 6. Pour tout $f \in R(H)$, on définit une fonction $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ de la manière suivante :
- si C est une classe de conjugaison contenue dans K, on pose $\tilde{f}(g) = f(e)$ pour tout $g \in C$;
- si $c \neq \{e\}$ est une classe de conjugaison dans H, on pose $\tilde{f}(gxg^{-1}) = f(x)$ pour tout $x \in c$ et tout $g \in G$.

1. Vérifier que $\tilde{f}$ est une fonction bien définie qui est dans $R(G)$.
2. Montrer que $\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_G = \langle f, f \rangle_H$.
3. Montrer que si $f(e) = 0$, alors pour tout $\theta \in R(G)$, on a $\langle \tilde{f}, \theta \rangle_G = \langle f, \theta_H \rangle_H$, où θ_H est la restriction de θ à H.
4. Montrer la formule

$$\langle \tilde{f}, \theta \rangle_G = \langle f, \theta_H \rangle_H + f(e)(\langle \mathbf{1}_G, \theta \rangle_G - \langle \mathbf{1}_H, \theta_H \rangle_H).$$

Exercice 7. Soient χ un caractère de H et θ un caractère de G.

1. Montrer que $\langle \tilde{\chi}, \theta \rangle_G \in \mathbb{Z}$. Cette propriété assure-t-elle que $\tilde{\chi}$ soit un caractère de G ?
2. Supposons que χ est irréductible. Montrer que $\tilde{\chi}$ est un caractère irréductible de G.
   (*Indication : vérifier que* $\tilde{\chi}(e) \geqslant 0$.)
3. Montrer que dans le cas général $\tilde{\chi}$ est toujours un caractère de G.
   (*Indication : utiliser la base de* $R(H)$ *formée des caractères irréductibles.*)

Exercice 8. Soit χ_0 le caractère de la représentation régulière de H.

1. Donner toutes les valeurs de $\tilde{\chi}_0$ sur G.
2. En utilisant l'Exercice 1, montrer que K est un sous-groupe distingué de G, dont H est un complément.

Exercice 9. Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X, tel que tout élément autre que l'élément neutre a au plus un point fixe dans X. Soit K' l'ensemble des éléments de G qui n'ont aucun point fixe, et soit $K = K' \cup \{e\}$. Montrer que K est un sous-groupe de G, qui est distingué.