Corrigé du DM 2

Exercice 1. 1. Si aucun I_k n'est inclus dans $\mathfrak{p}$, il existe pour tout k entre 1 et n un élément $i_k \in I_k \backslash \mathfrak{p}$. Alors, $i_1 \cdots i_k \in I_1 \cdots I_k$ mais n'appartient pas à $\mathfrak{p}$ car celui-ci est premier, donc $I_1 \cdots I_k$ n'est pas inclus dans $\mathfrak{p}$. Ceci prouve le résultat attendu par contraposée.

2. Supposons par l'absurde que l'assertion à prouver est fausse, c'est-à-dire qu'il existe des idéaux de A ne contenant pas de produit (fini) d'idéaux premiers. Comme A est noethérien, on peut prendre un idéal I maximal pour cette hypothèse, et alors I ne peut pas être A tout entier ni un idéal premier, donc il existe a et b dans $A \backslash I$ tels que $ab \in I$. Les idéaux $I + (a)$ et $I + (b)$ contiennent strictement I donc contienent chacun un produit d'idéaux premiers, et $(I + (a))(I + (b)) \subset I$ donc I contient un produit d'idéaux premiers en regroupant les produits associés à $I + (a)$ et $I + (b)$, contradiction. Donc tout idéal de A contient un produit d'idéaux premiers.

3. Supposons que A est intègre et fini. Pour tout $a \in A$ non nul, la multiplication par a est injective entre A et A qui sont de même cardinal (fini), donc bijective, c'est-à-dire qu'il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$, et a est donc inversible. L'anneau A est donc un corps.

4. Tout d'abord, pour tout $a \in A$, $X - a$ est unitaire et annule a donc A est inclus dans $\overline{A}^B$. Si $b \in B$ est entier sur A, annulé par un polynôme unitaire $P \in A[X]$ de degré n, alors le A-module $A[b]$ est engendré par $1, b, \cdots, b^{n-1}$ (donc de type fini) et stable par multiplication par b. Réciproquement, soit M un sous-A-module de B non nul de type fini, stable par multiplication par b. Notons φ l'endomorphisme de multiplication par b sur M. En choisissant une famille génératrice M de ce A-module et une matrice P (non nécessairement unique si la famille génératrice n'est pas libre) associée à φ, d'après le théorème de Cayley-Hamilton pour les A-modules de type fini, le polynôme unitaire $\det(XI - P)$ est unitaire et annule φ. Pour $m \in M$ non nul, on a donc $P(\varphi)(m) = P(b) \cdot m = 0$ donc $P(b) = 0$ par intégrité de B, ce qui prouve le résultat.

5. Soient b, c deux éléments de B entiers sur A. Alors, $A[b]$ et $A[c]$ sont des sous-A-modules de type fini de B, et donc $A[b, c]$ (l'ensemble des polynômes de $A[X, Y]$ évalués en (b, c)) l'est également (plus précisément, si $A[b]$ est engendré par les $(b^i)_{i \leq m}$ et $A[c]$ par les $(c^j)_{j \leq n}$ alors $A[b, c]$ est engendré par les $(b^i c^j)_{i \leq m, j \leq n}$). De plus, $A[b, c]$ est par construction stable par multiplication par $b - c$ et bc donc $b - c$ et bc sont entiers sur A par la question précédente. Ainsi, $\overline{A}^B$ est bien un sous-anneau de B, et il contient trivialement A.

6. Pour tout $c \in C$, si c est entier sur A, il l'est en particulier sur $\overline{A}^B$ donc $\overline{A}^C \subset \overline{\overline{A}^B}^C$. Réciproquement, si $c \in C$ est entier sur $\overline{A}^B$, il existe un polynôme unitaire $P = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots b_0 \in \overline{A}^B[X]$ annulant c, et si on note $A' = A[b_0, \cdots, b_{n-1}]$, c'est un A-module de type fini car $b_0, \cdots, b_{n-1}$ sont entiers sur A (voir l'argument détaillé dans la question précédente), et c est entier sur A' car $P \in A'[X]$, donc $A'[c]$ est un A'-module de type fini, mais A' étant un A-module de type fini, $A'[c]$ est un A-module de type fini, stable par multiplication par c donc c est entier sur A d'après la question précédente, ce qui prouve que $\overline{\overline{A}^B}^C = \overline{A}^C$.

Exercice 2. 1. Si I et J sont des idéaux généralisés de A, $I + J$ et $I \cdot J$ sont bien des sous-A-modules de K, et par hypothèse il existe $a, b \in A$ non nuls tels que $aI \subset A$ et $bJ \subset A$. Alors, $ab \in A$ est non nul et $ab(I+J) = abI + abJ \subset bA + aA \subset A$ et $abI \cdot J = (aI) \cdot (bJ) \subset A \cdot A = A$, donc $I + J$ et $I \cdot J$ sont bien des idéaux généralisés de A.

2. Pour tous $x, y \in I^{-1}$, $(x + y)I \subset xI + yI \subset A$ donc $xy \in I^{-1}$ et pour $a \in A$, $axI \subset aA \subset A$ donc $ax \in I^{-1}$, ce qui prouve que I^{-1} est un sous-A-module de K, et comme I est non

nul, il existe $a \in I$ non nul, qu'on peut supposer dans $I \cap A$ quitte à multiplier par son dénominateur, et alors $aI^{-1} \subset A$ par construction de I^{-1}, ce qui prouve que I^{-1} est un idéal généralisé de A. Ensuite, par définition de I^{-1}, pour tous $i \in I, j \in I^{-1}$, $ij \in A$ donc $I \cdot I^{-1}$ est inclus dans A, étant le groupe additif engendré par ces termes. Enfin, si $I \subset J$, pour tout $x \in K$, si $xJ \subset A$, alors $xI \subset xJ \subset A$ ce qui prouve que $J^{-1} \subset I^{-1}$.

3. Si $I \cdot I^{-1} = A$, l'idéal généralisé I^{-1} (qui en est bien un d'après la question précédente) rend I inversible. Réciproquement, si $I \cdot J = A$ pour un certain idéal généralisé J, comme pour tout $j \in J$, $jI \subset A$, on a $J \subset I^{-1}$ donc $A = I \cdot J \subset I \cdot I^{-1} \subset A$ d'après la question précédente, d'où $I \cdot I^{-1} = A$. Sous ces conditions équivalentes, on peut en particulier écrire

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

avec $a_1, \cdots, a_n \in I$ et $b_1, \cdots, b_n \in I^{-1}$, et alors, pour tout $a \in I$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} (ab_i) a_i$$

or chacun des ab_i appartient à A par définition de I^{-1}, donc I est engendré en tant que A-module par $a_1, \cdots, a_n$ et donc de type fini.

4. Pour tout $a \in A$ non nul, (a) est inversible car $(a) \cdot 1/aA = A$.

5. Soient I, J des idéaux généralisés. Si les deux sont inversibles, alors grâce à la question 3, $IJ(J^{-1}I^{-1}) = IAI^{-1} = II^{-1} = A$ donc IJ est inversible. Réciproquement, si IJ est inversible, il existe un idéal généralisé K tel que $IJK = A$, et alors $I(JK) = J(IK) = A$, et comme un produit d'idéaux généralisés en est encore un, I et J sont donc inversibles.

6. Soit I un idéal propre de A non nul, et $a \in I$ non nul. Comme A est noethérien, d'après la question 2 de l'exercice 1 (modifiée pour avoir des idéaux premiers non nuls), il existe donc des idéaux premiers non nuls $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ tels que

$$\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset (a) \subset I$$

et on suppose qu'on a pris un nombre minimal n d'idéaux premiers réalisant cette condition. Or, d'après la question 1 de l'exercice 1, il existe un des idéaux premiers (disons $\mathfrak{p}_1$) qui est inclus dans I, donc égal à I car les idéaux premiers non nuls sont supposés maximaux. Par minimalité, on a $\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n$ qui n'est pas inclus dans (a) et contient donc un certain $b \in A$ non multiple de a, de sorte que $\lambda = b/a \in K \backslash A$, et pour tout $x \in I$, $\lambda x \in 1/a\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset 1/a(a) \subset A$ donc $\lambda I \subset A$, ainsi $\lambda \in I^{-1} \backslash A$.

7. Soit $F(X,Y) = P(X,Y)/Q(X,Y)$ telle que $F \in I^{-1}$, avec P et Q premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X,Y]$ (qui est factoriel), montrons que $F \in \mathbb{C}[X,Y]$. Par hypothèse, $XF \in A$ donc Q divise X par le lemme de Gauss, et de même Q divise Y. Par argument de degré en X et Y, Q est donc constant, c'est-à-dire que $F \in \mathbb{C}[X,Y]$, et $I^{-1} = \mathbb{C}[X,Y]$.

Exercice 3. 1. Soit A un anneau principal (en particulier intègre, ce qui permet d'utiliser l'exercice 2). Il est de type (I) grâce à la question 4 de l'exercice 2. Ensuite, ses idéaux maximaux sont exactement les idéaux de la forme (p) avec p un irréductible de A, et alors, pour tout idéal I non nul de A, on a $I = (a) = (\prod_{i=1}^{r} p_i) = \prod_{i=1}^{r} (p_i)$ avec $p_1, \cdots, p_r$ irréductibles par factorialité de A, ce qui prouve que A est de type (D).

2. L'anneau $\mathbb{C}[X,Y]$ ne peut pas être de type (I) car $I \cdot I^{-1} = I \neq \mathbb{C}[X,Y]$ pour $I = \mathbb{C}[X,Y]$ (grâce aux questions 3 et 7 de l'exercice 2). De plus, l'idéal (X) (qui est premier car le quotient est isomorphe à $\mathbb{C}[Y]$) ne s'écrit pas comme un produit d'idéaux maximaux car alors l'un d'eux serait inclus dans (X) d'après l'exercice 1 question 1, or (X) n'est pas maximal. Donc $\mathbb{C}[X,Y]$ n'est pas non plus de type (D).

3. Supposons que A est de type (I). Il est alors noethérien d'après la question 3 de l'exercice 2, et on peut supposer par l'absurde qu'il n'est pas de type (D) et prendre un idéal I de A non nul ne s'écrivant pas comme un produit d'idéaux maximaux, maximal pour cette hypothèse. Il ne

peut pas être lui-même maximal, et comme A est noethérien il existe donc $\mathfrak{m}$ un idéal maximal contenant strictement I. Alors, $A \subset \mathfrak{m}^{-1}$ et $I\mathfrak{m}^{-1}$ contient strictement I car $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$. On peut donc écrire par maximalité $I\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$, puis $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n\mathfrak{m}$ en multpliant par $\mathfrak{m}$, contradiction. Donc A est de type (D), reste à montrer que la décomposition est unique : soient des idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_m$ et $\mathfrak{m}'_1, \cdots \mathfrak{m}'_n$ tels que

$$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m = \mathfrak{m}'_1 \cdots \mathfrak{m}'_n$$

Alors, par la question 1 de l'exercice 1, l'un des facteurs de droite est inclus (donc égal à) $\mathfrak{m}_m$, disons que c'est $\mathfrak{m}'_n$. On peut alors multiplier l'égalité par $\mathfrak{m}_m^{-1}$, et comme A est de type (I), on obtient

$$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{m-1} = \mathfrak{m}'_1 \cdots \mathfrak{m}'_{n-1}$$

En itérant le processus, on arrive nécessairement à $A = A$, ce qui prouve que $m = n$ et que les idéaux $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_m$ et $\mathfrak{m}'_1, \cdots \mathfrak{m}'_m$ sont les mêmes à permutation près, d'où l'unicité de la décomposition.

4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A, écrivons-le par hypothèse $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m$ avec $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_m$ des idéaux maximaux de A. D'après la question 1 de l'exercice 1, $\mathfrak{p}$ contient donc un certain $\mathfrak{m}_i$, or ce dernier étant maximal, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_i$ est maximal. Donc tout idéal premier non nul de A est maximal.
5. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul et $a \in \mathfrak{p}$ non nul. On écrit, avec les mêmes conventions que la question précédente, $(a) = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m$ mais alors ce produit est inclus dans $\mathfrak{p}$ donc l'un des facteurs est égal à $\mathfrak{p}$ (inclusion d'un idéal maximal dans un autre, donc égalité) d'après la question 1 de l'exercice 1. D'après l'exercice 2, (a) est inversible (question 4) donc $\mathfrak{p}$ l'est (question 5). Ainsi, tout idéal maximal non nul de A est inversible, donc tout idéal non nul l'est car A est de type (D) et en réutilisant la question 5 de l'exercice 2. Enfin, tout idéal généralisé de A s'écrit comme un produit $I = (\lambda)J$ avec J un idéal de A et $\lambda \in K$. Chacun de ces deux termes étant inversible, I l'est aussi, donc A est de type (I).
6. Si A est factoriel, les irréductibles de A sont également premiers, et engendrent des idéaux premiers. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. En prenant la décomposition en irréductibles d'un élément non nul de $\mathfrak{m}$, un de ces irréductibles appartient à $\mathfrak{m}$ car ccelui-ci est premier, notons-le p. Alors, (p) est premier non nul, or d'après la question 4 il est donc maximal, c'est-à-dire que $\mathfrak{m} = (p)$. Les idéaux maximaux sont donc principaux, or un produit d'idéaux principaux est principal et A est de type (D) donc A est principal.