UGA
2020-2021

Préparation à l'agrégation
Option C

TP : Algèbre linéaire

1 Décomposition LU et applications

Exercice 1.1. (Décomposition LU)

1. Rappeler le principe de la décomposition LU.
2. La tester sur Xcas pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ avec la fonction `lu` et vérifier qu'on a bien $A = LU$ dans ce cas.
3. Pour tester sa complexité, utiliser `time` (évaluation du temps de calcul) et `ranm` (matrices à coefficients aléatoires) pour des matrices de taille 10,20,50,100...

Exercice 1.2. (Inverse efficace via LU)

On dispose d'une écriture $PM = LU$ avec P une matrice de permutation, L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure toutes inversibles.

1. Écrire M^{-1} en fonction de P, L, U.
2. Pour chaque vecteur E_i de la base canonique, résoudre $LX = E_i$ et $UX = E_i$. En déduire L^{-1} et U^{-1}.
3. En déduire une méthode pour calculer M^{-1} grâce à la décomposition LU, et la coder en Xcas si le temps le permet.

2 Polynôme minimal et polynôme caractéristique sur les corps finis

Exercice 2.1. (Polynôme minimal)

On cherche un algorithme pour calculer le polynôme minimal d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{F}_q)$.

1. On prend v un vecteur aléatoire de $\mathbb{F}_q^n$, et on note $\pi_{M,v}$ un générateur de l'idéal des $P \in \mathbb{F}_q[X]$ tels que $P(M)(v) = 0$. Montrer que ce générateur peut être calculé en mettant la matrice $v, Mv, \cdots, M^n v$ sous forme échelonnée et en déterminant son noyau.
2. Si ce noyau est de dimension 1, montrer que $\pi_{M,v} = \pi_M = \chi_M$ les polynômes minimal et caractéristique. En général, montrer que $\pi_{M,v}$ divise π_M.
3. Si ce noyau est de dimension supérieure, prendre d'autres vecteurs aléatoires v' et prendre le PPCM avec les $\pi_{M,v'}$ puis tester.
4. Mettre en oeuvre cet algorithme avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis une matrice aléatoire de taille 30.

Exercice 2.2. (Polynôme caractéristique)

On veut ici calculer le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1. Si $n < p$, utiliser $n+1$ calculs de déterminants et une interpolation pour en déduire χ_M. Écrire l'algorithme correspondant.
2. Si $n \geq p$, expliquer comment on pourrait s'en tirer avec des calculs dans un corps fini convenable.

3 Calcul de déterminant

Exercice 3.1. (Pivot de Gauss)

En s'inspirant éventuellement de la page 302 du manuel de Xcas, écrire un algorithme `piv` de pivot de Gauss qui procède ainsi à la k-ième étape, en supposant que le pivot obtenu à l'étape précédente est dans la case $(k-1, p(k-1))$.

— Si $m_{k,p(k-1)+1} = 0$, permuter avec une ligne inférieure pour le rendre non nul (sinon, passer à $p(k-1)+2$, et ainsi de suite).

— Une fois arrivé à cette étape, poser $p(k)$ l'indice de la colonne où est notre coefficient, puis faire $L_k \leftarrow L_k/m_{k,p(k)}$.

— Ensuite, faire $L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell,p(k)} L_k$.

Exercice 3.2. (Déterminant modulaire)

On utilise ici les réductions modulo p pour calculer les déterminants de matrices entières.

1. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, rappeler (et redémontrer) la borne d'Hadamard qui borne $\det(M)$ en fonction des normes L^2 de ses vecteurs colonnes.
2. En déduire grâce aux restes chinois (fonction `ichinrem`) et à des calculs de déterminants modulo p premier un algorithme pour calculer $\det(M)$ si $M \in M_n(\mathbb{Z})$. L'exécuter sur une matrice aléatoire de taille 50.