UGA
2020-2021

Préparation à l'agrégation
Option C

TP/TD : Résultant et applications

1 Le calcul du résultant

Exercice 1.1. (la commande `resultant`)

1. Calculer `resultant(x^3 + x^2 + 1, x+ 5)`. Vérifier à la main. Utilser également `sylvester` et comparer leurs efficacités avec des polynômes un peu plus gros.
2. Calculer maintenant `resultant(x^2 *y + x*y + 2, x + y^2 + 1)`. Par rapport à quelle variable le résultant a-t-il été calculé ?
3. On peut spécifier cette variable en l'ajoutant en dernier argument. S'en servir pour calculer le résultant des polynômes X^2Y et $X + Y^2 + 1$ en tant que polynômes en Y et à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 1.2. (Algorithme de calcul type Euclide)
On pose deux polynômes $P, Q \in K[X]$ non nuls sur un corps K.

1. Rappeler le lien entre $\mathrm{Res}(P, Q)$ et $\mathrm{Res}(Q, R)$ où R est le reste de la division euclidienne de P par Q.
2. Grâce à cette formule, concevoir un programme `resultantEuclide` pour le calcul du résultant (utiliser la commande `rem`).
3. L'appliquer même si P, Q sont seulement à coefficients dans un anneau factoriel, par exemple $P, Q \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

2 Racines communes et systèmes polynomiaux

Exercice 2.1. (Élimination en une variable)
Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les polynômes

$$X^3 + \alpha X^2 + (\alpha^2 + 1)X + 2, \quad X^2 + \alpha X + 1$$

ont une racine commune dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.2. (Discriminant)

1. En réutilisant le cours, montrer que pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe un polynôme en les coefficients de P appelé discriminant tel que $\mathrm{Disc}(P) = 0$ si et seulement si P possède des racines multiples. Quel est le degré de $\mathrm{Disc}(P)$?
2. Donner l'expression explicite du discriminant en degré 2 ($P = X^2 + aX + b$) et 3 ($P = X^3 + pX + q$).

3. Question théorique : montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense.

Exercice 2.3. (Résultants successifs)

Résoudre le système suivant à l'aide de Xcas en éliminant successivement les variables grâce au résultant :

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3 &= 8 \\ a^2+b^2+c^2 &= 6 \\ a+b+c &= 4 \end{cases}$$

3 Applications

Exercice 3.1. (Intersection de courbes algébriques)

1. En utilisant la fonction `plotimplicit`, tracer les courbes algébriques définies par $xy = 4$ et $y^2 = x(x-3)(x^2-16)$. Trouver graphiquement leurs points d'intersection réels.
2. Utiliser `resultant` pour trouver tous leurs points d'intersection et discuter.
3. Faire de même avec les courbes données par $(x-2)^2 + y^2 = 4$ et $y^2 = (x-3)(x^2-16)$.
4. Lorsqu'on calcule $\mathrm{Res}_X(P,Q) \in K[Y]$ avec $P,Q \in K[X][Y]$ quel est en général le degré du résultant en fonction de ceux de P et Q en X et Y ?
5. En déduire ce que devrait être le nombre de points d'intersection des deux courbes algébriques définies par P et Q.

Exercice 3.2. (Algébricité de somme et produit)

1. Pour α, β deux nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$, rappeler comment on peut obtenir en tant que résultant un polynôme annulateur de $\alpha+\beta$ ou $\alpha\beta$.
2. En faire un programme permettant de les calculer si on connaît les polynômes minimaux de α et β.
3. L'appliquer à $\sqrt{3}$ et $e^{2i\pi/5}$, ou encore $\sqrt{7}$ et une racine de X^5+X+1.

Exercice 3.3. (Implicitation de courbes paramétrées)

On commence avec une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ où

$$x(t) = \frac{P_x(t)}{Q_x(t)}, \quad y(t) = \frac{P_y(t)}{Q_y(t)}$$

avec $P_x, P_y, Q_x, Q_y \in \mathbb{R}[T]$ et les deux fractions rationnelles sous forme réduite.

1. Pour $(x,y) \in \mathcal{C}$, montrer que $\mathrm{Res}(Q_x(T)x - P_x(T), Q_y(T)y - P_y(T)) = 0$.
2. En déduire un polynôme explicite $F(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que si $(x,y) \in \mathcal{C}$, $F(x,y) = 0$.
3. La réciproque est-elle vraie ? Prendre l'exemple du cercle unité.