UGA
2020-2021

Préparation à l'agrégation
Géométrie affine

Cours de géométrie affine

Conventions préliminaires

Dans ce cours, on rappellera les notions et résultats principaux de géométrie affine et euclidienne, d'où les conventions suivantes :

• Le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ par défaut, bien que la plupart des notions affines se traduisent sans aucune difficulté sur un corps quelconque (ce sera parfois mis en exercice).

• Les espaces vectoriels et vecteurs seront autant que possible notés $\vec{E}, \vec{u}$ pour marquer la différence avec leurs pendants affines.

• Tous les espaces vectoriels (et donc aussi les espaces affines) considérés seront de dimension finie.

• Dans un but d'efficacité, un certain nombre de questions naturellement soulevées ou de points secondaires (mais utiles à la compréhension) seront mis sous formes d'exercices au fil des notes. Les exercices plus difficiles et/ou moins centraux dans le cours seront regroupés dans une feuille.

• Beaucoup d'exercices sont des conséquences quasiment directes d'un résultat d'algèbre linéaire (souvent bien connu), et ceux-ci seront alors marqués d'un (V).

1 Prélude : actions de groupes

Définition 1.1. Une *action (à gauche)* d'un groupe G sur un ensemble (non vide) X est la donnée d'une application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$$

telle que :

— Pour tout $x \in X$, $1_G \cdot x = x$.

— Pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$, $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$,

ou de manière équivalente un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Bij}(X)$ via $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$ $^{(P)}$.

Pour une action à droite, on note plutôt ceci comme $f(g,x) = x \cdot g$ et on doit alors avoir $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$. On peut passer d'une action à gauche à une action à droite en définissant $x \cdot g := g^{-1} \cdot x$ $^{(P)}$. Dans le cas où G est commutatif, $x \cdot g := g \cdot x$ fonctionne également $^{(P)}$.

Une action de groupe peut satisfaire différentes propriétés intéressantes listées ci-dessous :

— L'action est *fidèle* si le morphisme de groupes induit est injectif, autrement dit si le seul $g \in G$ qui fixe *tous* les $x \in X$ est l'élément neutre. Exemple : Groupe de permutation $\mathfrak{S}_n$ sur $[|1, n|]$, contre-exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur les droites (P).

— L'action est *transitive* s'il n'y a qu'une seule orbite, autrement dit si pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Exemple : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (P), contre-exemple $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sur les bases orthonormées (P).

— L'action est *simplement transitive* si de plus le g ci-dessus est unique : autrement dit, pour tous $x, y \in X$, il existe un unique $g \in G$ (dépendant bien sûr de x et y) tel que $g \cdot x = y$. On peut alors définir une bijection non canonique entre G et X en fixant un $x_0 \in X$ et par $g \mapsto g \cdot x_0$. Exemple : Un groupe agissant par translation sur lui-même (théorème de Cayley), contre-exemple $O_n(\mathbb{R})$ sur les droites de $\mathbb{R}^n$ (P).

2 Géométrie affine

2.1 Définitions de base

Définition 2.1 (Espace affine)**.** Un *espace affine* E est un ensemble non vide muni de l'action simplement transitive d'un espace vectoriel $\vec{E}$, qu'on note avec le symbole $+$ (et souvent à droite).

- Les éléments de E sont appelés *points*, les éléments de $\vec{E}$ sont appelés vecteurs, et l'espace $\vec{E}$ est appelé *direction de l'espace affine* E.
- La *dimension* de E est par définition $\dim \vec{E}$, et on parle de *droite affine* en dimension 1, *plan affine* en dimension 2.
- L'action de $\vec{E}$ sur E définit pour tout point $A \in E$ et tout vecteur $\vec{E}$, un point $A + \vec{v} \in E$, qu'on appelle le *translaté de A par $\vec{v}$*.
- Par simple transitivité, pour tous $A, B \in E$ il existe un unique $\vec{v} \in \vec{E}$ tel que $A + \vec{v} = B$, et ce vecteur est alors noté $\overrightarrow{AB}$, pour avoir la formule naturelle $A + \overrightarrow{AB} = B$.
- Dans de nombreuses références, l'espace vectoriel est plutôt noté $\mathcal{E}$. Par abus de notation, on résumera souvent l'espace affine par la notation E (l'action étant implicite).
- Un espace vectoriel $\vec{E}$ est un espace affine dirigé par lui-même grâce à sa loi d'addition interne (P). Réciproquement, l'espace affine E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel après choix d'une *origine* $O \in E$: la simple transitivité donne une bijection $E \to \vec{E}$ et on transporte alors la structure d'espace vectoriel sur E (P)(faire les calculs explicites de loi d'addition et multiplication scalaire). Ceci s'appelle le *vectorialisé de E en O*.

Il faut concevoir l'espace affine comme « ce sur quoi les translations agissent ». Par construction, les propriétés élémentaires suivantes sont vraies (P) :

- Pour tous $A, B \in E$, $\overrightarrow{AA} = 0$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- Pour tous $A, B, C \in E$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles).

Exercice 2.2. (Règle du parallélogramme)

Pour quatre points A, B, A', B' d'un espace affine E, montrer que les égalités $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ sont équivalentes. On dit que le quadrilatère $AA'B'B$ est un *parallélogramme.*

La plupart des structures naturelles des espaces vectoriels peuvent se transporter sur les espaces affines, et c'est maintenant ce qu'on va s'atteler à faire, avant de prouver leurs propriétés.

Définition 2.3 (Sous-espace affine)**.** Soit E un espace affine. Un *sous-espace affine* (non vide) F de E est une partie de E telle qu'il existe $A \in F$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ tels que

$$F = A + \overrightarrow{F} := \{A + \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}\}.$$

Alors :

- $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AB}, B \in F\} = \{\overrightarrow{BC},\ (B, C) \in F^2\}$. En particulier, il est unique et indépendant du point-base A.
- F est muni d'une structure naturelle d'espace affine de direction $\overrightarrow{F}$.
- Pour tout point $B \in E$, $B \in F$ si et seulement si $B + \overrightarrow{F} \subset F$ (et on a alors égalité).
- Pour deux sous-espaces affines F, G de E, on dit que F est *faiblement parallèle à* G si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et *parallèle* si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ (on a alors $F = G + \overrightarrow{v}$ pour un certain $\overrightarrow{v}$ (P)).

Démonstration. Pour tout $B \in F$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que B est de la forme $A + \overrightarrow{v}$, à savoir $\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$ pour tout $B \in F$, et c'est donc également le cas pour tout $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ si $C \in F$, d'où une inclusion. Réciproquement, pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$, on doit avoir $A + \overrightarrow{v} \in F$ et en écrivant $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ pour un certain B, on en déduit que $\overrightarrow{F}$ est contenu dans les $\overrightarrow{AB}$ $(B \in F)$, d'où l'égalité des ensembles.

La structure d'espace affine vient du fait que $A + \overrightarrow{v} \in F$ si et seulement si $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$, et ce pour tout point A de F : autrement dit, l'action de $\overrightarrow{E}$ sur E se restreint bien (et reste simplement transitive) sur $\overrightarrow{F}$ et F.

Enfin, pour $B \in F$, tout élément de $\overrightarrow{F}$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{BC}$ avec $C \in F$, et alors $B + \overrightarrow{BC} = C \in F$, ce qui prouve que $B + \overrightarrow{F} \subset F$. La réciproque de cette implication est évidente en utilisant que $B = B + \overrightarrow{0}$. □

Un exemple immédiat d'espace affine est le suivant : dans un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ (qui est sa propre direction), prendre un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ et un point $x \in E$, et poser $F = x + \overrightarrow{F}$, c'est-à-dire le translaté de $\overrightarrow{F}$ par x. C'est un sous-espace affine mais pas un sous-espace vectoriel à moins que $x \in \overrightarrow{F}$ (P).

Exercice 2.4. [Postulat des parallèles]

Avec cette définition, redémontrer le postulat des parallèles d'Euclide : dans un espace affine E, pour toute droite affine D et tout point A, il existe une unique droite de E parallèle à D et passant par A. Démontrer également que par deux points distincts de E passe une unique droite.

Définition 2.5 (Applications affines)**.** Soients E et E' deux espaces affines.

Une *application affine* $f : E \to E'$ est une application telle que pour un $A \in E$, le morphisme $f_A : \vec{E} \to \vec{E'}$ défini par

$$f_A(\vec{v}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})}, \text{ soit } f(A+\vec{v}) = f(A) + f_A(\vec{v}),$$

est une application linéaire. Alors, f_A ne dépend pas du choix de A et on l'appelle *partie linéaire de* f, notée $\vec{f}$, de sorte que pour tous $A, B \in E$,

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

- La composée de deux applications affines $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$ est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ (P), et si une application affine f est une bijection, son inverse est affine également et de partie linéaire est $\vec{f}^{-1}$ (P).
- Lorsque $E = E'$ est f est bijective, on parle de *transformation affine*. Le groupe formé par les transformations affines est le *groupe affine de* E, noté $\mathrm{GA}(E)$ ou $\mathrm{GAff}(E)$.

Démonstration. Supposons que f_A est linéaire. Si B est un autre point de E, on a alors $f_B(\vec{v}) = \overrightarrow{f(B)f(B+\vec{v})}$ et en remplaçant B par $A + \vec{B}$ et $B + \vec{v}$ par $A + (\overrightarrow{AB} + \vec{v})$, on obtient

$$f_B(\vec{v}) = -f_A(\overrightarrow{AB}) + f_A(\overrightarrow{AB} + \vec{v}) = f_A(\vec{v})$$

par linéarité de f_A. □

Le résultat fondamental des applications affines est le suivant.

Proposition 2.6. *Soient E et E' deux espaces affines et $\varphi \in \mathrm{Hom}(\vec{E}, \vec{E'})$. Pour tous $A \in E$ et $B \in E'$, il existe une unique application affine $f : E \to E'$ telle que $f(A) = B$ et $\vec{f} = \varphi$.*

Autrement dit, on peut toujours déterminer (uniquement) une application affine par l'image d'un point prescrit et sa partie linéaire.

Démonstration. Commençons par l'unicité, supposons que deux applications affines f et g aient ces propriétés avec A, B, φ comme dans l'énoncé. Alors, pour tout point $M \in E$,

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(M)} = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = B + \varphi(\overrightarrow{AM}) = g(M)$$

par le même calcul, donc $f = g$. Ceci donne même la définition de f, en posant donc $f(M) := B + \varphi(\overrightarrow{AM})$. Avec $M = A$ on a bien $f(A) = B$, et ensuite par construction $f_A = \varphi$ donc f est bien affine de partie linéaire φ. □

Voici les exemples les plus simples d'applications affines.

Exemple 2.7 (Quelques applications affines)**.**

- Les applications affines f telles que $\vec{f} = 0$ sont les applications constantes (P).
- Les transformations affine $f : E \to E$ telles que $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ sont les translations, et forment un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ canoniquement isomorphe à $\vec{E}$ (P). On note en général $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ définie par $A \mapsto A + \vec{v}$.

Comme attendu, il y a un lien net entre applications et sous-espaces affines.

Proposition 2.8. *Pour toute application affine $f : E \to E'$:*

- *L'image d'un sous-espace affine F de E par f est un sous-espace affine de E' de direction $\vec{f}(\vec{F})$.*
- *L'image réciproque d'un sous-espace affine F' de E' par f est soit vide soit un sous-espace affine de E de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{F})$.*

En particulier, l'image de E est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Im}\vec{f}$ *et toute fibre non vide de f en est un également, de direction* $\operatorname{Ker}\vec{f}$.

Démonstration. En fixant un point A de E, dans le premier cas il suffit de montrer l'égalité $f(F) = f(A) + \vec{f}(\vec{F})$. Pour tout $B \in F$, $\overrightarrow{AB} \in \vec{F}$ donc $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) \in \vec{f}(\vec{F})$, ce qui prouve que $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \in F$, d'où la première inclusion. La réciproque s'obtient de même en écrivant tout élément de $\vec{F}$ sous la forme $\overrightarrow{AB}$.

Dans le deuxième cas, si $f^{-1}(F')$ est non vide, prenons-en un point A et montrons que $f^{-1}(F') = A + \vec{f}^{-1}(\vec{F'})$. Si $f(B) \in F'$ pour un certain $B \in E$, alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \in \vec{F'}$ donc $\overrightarrow{AB} \in \vec{f}^{-1}(\vec{F'})$. Réciproquement, si $B = A + \vec{v}$ avec $\vec{f}(\vec{v}) \in \vec{F'}$, alors $f(B) \in f(A) + \vec{F'} \subset F'$, ce qui prouve l'égalité. $\square$

Exercice 2.9. (Espace quotient)

Soit E un espace affine et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Montrer que la relation $A \sim B$ sur E définie par $\overrightarrow{AB} \in \vec{F}$ est une relation d'équivalence et que l'espace quotient noté $E/\vec{F}$ a une structure naturelle d'espace affine et un morphisme canonique affine $E \to E\vec{F}$.

Exercice 2.10. Montrer qu'une application affine est injective (resp. surjective) si et seulement si sa partie linéaire l'est.

Exercice 2.11. Soit f une transformation affine de E.

Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit une variété affine de direction $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

2.2 Générateurs d'un sous-espace affine, repères affines et coordonnées cartésiennes

Nous allons maintenant développer la notion de sous-espace affine engendré par une partie d'un espace affine E, en particulier pour les parties finies.

Lemme 2.12. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces affines de E alors $\cap_{i\in I} F_i$ est soit vide soit un sous-espace affine de E de direction $\cap_{i\in I}\vec{F_i}$.*

Démonstration. Notons F cette intersection et supposons qu'il existe un point $A \in F$ fixé. Alors, pour tout $i \in I$ et tout point $M \in E$, $M \in F_i \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{F_i}$ et donc $M \in F$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \cap_{i\in I}\vec{F_i}$, ce qui prouve l'assertion par définition d'un sous-espace affine. $\square$

Définition 2.13 (Sous-espace affine engendré)**.** Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de E.

- Le *sous-espace affine engendré par* $\mathcal{P}$, noté $\mathrm{Aff}(\mathcal{P})$, est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{P}$, et donc le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{P}$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}$,

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{P}) = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{P} \setminus \{A\})$$

  et la direction de $\mathrm{Aff}(\mathcal{P})$ est donc le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ engendré par les vecteurs formés par les points de $\mathcal{P}$.
- Si $\mathcal{P} = (A_0, \cdots, A_d)$ est un $(d+1)$-uplet de points, alors $\dim \mathrm{Aff}(\mathcal{P}) \leq d$ $^{(P)}$. En cas d'égalité, on dit que ces points sont *affinement indépendants*. En particulier, deux points distincts A, B engendrent une droite notée (AB) et trois points A, B, C *non alignés* (i.e. affinement indépendants) engendrent un plan noté (ABC).

Cette définition mène à une caractérisation visuelle et utile des sous-espaces affines.

Proposition 2.14. *Une partie non vide F de E est un sous-espace affine si et seulement si pour tous $A, B \in F$, $(AB) \subset F$.*

Démonstration. Si F est un sous-espace affine, pour $A, B \in F$, on a $A \in F$ et $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$ et alors $(AB) = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}) \subset F$.

Réciproquement, supposons que pour tous $A, B \in F$, $(AB) \subset F$. On fixe un $A \in F$ et on note alors $\overrightarrow{F}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}, B \in F$, de sorte que $F = A + \overrightarrow{F}$. Alors, pour tous $B, C \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, d'abord $\lambda\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$ car $A + \lambda\overrightarrow{AB} \in (AB) \subset F$, et ensuite

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{F}.$$

En effet, le milieu I de $[BC]$ appartient à (BC) donc à F, et ensuite

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI} \in \overrightarrow{F}.$$

Ceci prouve que F est bien un sous-espace affine de E. □

Exercice 2.15. (Sous-espace engendré par deux sous-espaces affines)

Soient E un espace affine et F, G deux sous-espaces affines de E. On note $H = \mathrm{Aff}(F \cup G)$.

(a) Montrer que si $F \cap G \neq \emptyset$ alors H est de direction $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ et exprimer sa dimension avec la formule de Grassmann.

(b) Montrer que si $F \cap G = \emptyset$, exhiber un vecteur de $\overrightarrow{H}$ qui n'appartient pas à $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ puis montrer que $\dim H = \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1$.

(c) Montrer que si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$ alors $F \cap G \neq \emptyset$ et que si la somme est de plus directe alors $F \cap G$ est même un singleton.

Le cas le plus intéressant des familles indépendantes, comme en algèbre linéaire, est celui des familles indépendantes maximales.

Définition 2.16 (Repères affines)**.** Soit E un espace affine de dimension n.

- Un *repère affine* $\mathcal{R}$ est la donnée d'une paire $(O, \mathcal{B})$ avec une origine $O \in E$ et une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})$ de $\vec{E}$. Ceci équivaut à la donnée d'un $(n+1)$-uplet indépendant $(O, A_1, \cdots, A_n)$ via $\vec{e_i} = \overrightarrow{OA_i}$ (P)et on l'utilisera souvent.
- Pour tout repère affine $\mathcal{R}$ comme ci-dessus, tout point $M \in E$ admet un unique n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}.$$

  On appelle ce n-uplet les *coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}$*, et l'application des coordonnées cartésiennes définit un morphisme affine entre E et $\mathbb{R}^n$ (P).

Tout comme pour le cas linéaire, on peut maintenant tout exprimer grâce aux coordonnées cartésiennes.

Proposition 2.17 (Morphismes affines et coordonnées)**.** *Soient E, E' deux espaces affines de dimensions respectives n, m munis de repères $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$.*

Alors, pour toute application affine $f : E \to E'$, il existe un unique vecteur colonne $Y_0 \in \mathbb{R}^m$ et une unique matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que si $y = f(x)$ avec $x \in E$ et x (resp. y) a pour vecteur coordonnée X dans $\mathcal{R}$ (resp. Y dans $\mathcal{R}'$),

$$Y = MX + Y_0.$$

De plus, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\vec{f})$ et Y_0 est le vecteur des coordonnées de $f(O)$ dans $\mathcal{R}'$.

Réciproquement, toute application définie par une telle formule est une application affine entre E et E'.

Démonstration. Avec les notations plus haut, si $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \cdots, y_m)$ par définition, $\overrightarrow{O'Y} = \vec{f}(\overrightarrow{OX})$, et cela définit de manière unique la matrice M en tant que matrice de $\vec{f}$, puis Y_0 en appliquant l'égalité à $X = 0$.

Réciproquement, la formule définit une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et donc une application affine de E dans E' par transport. □

On peut tirer de ce résultat toutes les notions habituelles de coordonnées et changement de repère dans le contexte des espaces affines.

Ceci a plusieurs conséquences immédiates :

- *Changement de repère affine* : si $E = E'$ et $f = \mathrm{Id}_E$, la formule donne

$$X = PX' + X_{O'}$$

avec la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

- *Équations de sous-espaces affines* : si F est un sous-espace affine de E, il peut être défini comme fibre d'un morphisme affine et admet donc une équation en coordonnées de la forme $MX = Y_0$ pour une certaine matrice M (qui peut être choisie de rang $n - \dim F$). Il peut également être défini comme image d'un morphisme affine, et admet donc une paramétrisation de la forme $\{MX + Y_0, X \in \mathbb{R}^{\dim F}\}$.

Exercice 2.18. Montrer que pour deux espaces affines E et E' de même dimension avec des repères affines respectivement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, il existe une unique application affine $f : E \to E'$ envoyant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. Que dire du cas particulier $E = E'$?

2.3 Barycentres et convexité

2.3.1 Barycentres et coordonnées barycentriques

Définition 2.19 (Barycentre)**.**
Soit E un espace affine.

- Un *système de points pondérés* est une famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ de couples avec $A_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Son *poids total* est $\lambda := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. La *fonction vectorielle de Leibniz associée* est définie par
$$f(M) = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$
- Si le poids total du système est non nul, il existe un unique point G de E satisfaisant l'*équation barycentrique*
$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0},$$
et on appelle ce point le *barycentre* du système. Comme l'addition des vecteurs est commutative, le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points pondérés dans la famille $^{(P)}$(qui ne sera donc souvent pas indicée de 1 à n dans les notations).
- Pour tout point M de E, on a la *formule fondamentale*
$$\lambda\overrightarrow{MG} = f(M) = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i},$$
autrement dit c'est la moyenne pondérée des vecteurs $\overrightarrow{MA_i}$. Cette formule caractérise uniquement le barycentre.
- Pour n'importe quel $\mu \neq 0$, le barycentre de $(A_i, \mu\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ est encore G. Le barycentre est invariant par multiplication scalaire (non nulle) des poids $^{(P)}$ainsi que par permutation des points (pondérés) $^{(P)}$.
- Lorsque les scalaires sont tous égaux, on parle d'*isobarycentre* ou *centre de gravité* du système. En particulier, pour deux points pondérés $(A, 1), (B, 1)$, on appelle le barycentre obtenu le *milieu* du segment $[AB]$.
- Lorsque le poids total est 1 (et seulement dans ce cas, se méfier de la notation), on peut noter
$$G = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n.$$

Démonstration. Supposons que G existe bien. Alors, pour tout point M de E,
$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{GA_i}$$

et en sommant cette égalité pour tout i en pondérant par λ_i, on obtient que

$$\lambda\overrightarrow{MG} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

comme l'autre somme est nulle par hypothèse. En particulier, en fixant une origine $O = M$, si $\lambda \neq 0$, le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est entièrement déterminé et existe, puis satisfait la condition du barycentre en remontant les égalités ci-dessus, donc le barycentre existe et est unique. □

Exercice 2.20. Dans le cas où le poids total est nul, que dire de la fonction de Leibniz ?

Exercice 2.21. Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.

Exercice 2.22. Peut-on toujours définir le milieu de deux points si le corps de base, au lieu d'être $\mathbb{R}$, est un corps quelconque ?

La propriété fondamentale du barycentre est la suivante.

Théorème 2.23 (Associativité du barycentre).
Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés d'un espace affine E de poids total non nul.

Supposons que pour $J \subset I$, le système de points pondérés extrait des indices de J est de poids total $\lambda_J \neq 0$ et de barycentre G_J. Alors, le barycentre G du système total est également celui de $(G_J, \lambda_J) \cup (A_i, \lambda_i)_{i\in I\setminus J}$.

Démonstration. Pour tout point M de E, le barycentre G du système entier doit vérifier

$$\overrightarrow{MG} = \sum_{j\in J} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i\in I\setminus J} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \lambda_J \overrightarrow{MG_J} + \sum_{i\in I\setminus J} \lambda_i \overrightarrow{MA_i},$$

d'où le résultat par la formule fondamentale. □

Exercice 2.24. Soient A, B, C trois points d'un espace affine E. Montrer que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes, et que leur point d'intersection est le centre de gravité de A, B, C.

Les barycentres permettent de réécrire beaucoup de notions de géométrie affine de manière quantitative si nécessaire.

Proposition 2.25 (Critères barycentriques d'affinité).
Pour toute partie non vide S de E,

$$\mathrm{Aff}(S) = \{\textit{barycentres de points de } S\}.$$

En particulier, S est affine si et seulement si elle est stable par barycentres (à coefficients quelconques).

De plus, une application $f : E \to E'$ entre espaces affines est affine si et seulement si pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ de E de poids total non nul et barycentre G, la famille image $(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I}$ a pour barycentre $f(G)$ (on dit que f préserve les barycentres*).*

Démonstration. Notons $\mathrm{Bar}(S)$ l'ensemble de droite.

Par construction, un barycentre G de points $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ appartient à $\mathrm{Aff}(A_i)$ car $\overrightarrow{A_0G}$ est combinaison linéaire des $\overrightarrow{A_0A_i}$, donc $\mathrm{Bar}(S) \subset \mathrm{Aff}(S)$.

Réciproquement, en fixant $A_0 \in S$, comme $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(S)}$ est engendré par les $\overrightarrow{A_0M}$ $(M \in S)$, si $B \in \mathrm{Aff}(S)$, on peut écrire

$$\overrightarrow{A_0B} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{A_0A_i}, \quad (A_i \in S).$$

Alors, la formule fondamentale (appliquée à $M = A_0$) montre que B est le barycentre des $(A_i, \mu_i)_{0\leq i\leq n}$ avec $\mu_0 = 1-\sum_{i=1}^{n} \mu_i$. On a donc $\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Bar}(S)$.

En conséquence, comme S est affine si et seulement si $\mathrm{Aff}(S) = S$ par définition, on en déduit le critère barycentrique des sous-espaces affines.

Montrons maintenant la caractérisation barycentrique des applications affines avec les notations de l'énoncé. Si f est affine, pour le barycentre G d'une famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$, on a

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \text{ donc } \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i\in I} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = 0,$$

ce qui prouve que $f(G)$ est bien le barycentre de la famille image. Montrons maintenant la réciproque. On fixe un point $A_0 = A$ de E. Il suffit de montrer que f_A est linéaire, c'est-à-dire que pour tous $A_1, A_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$f_A(\lambda_1 \overrightarrow{AA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{AA_2}) = \lambda_1 f_A(\overrightarrow{AA_1}) + \lambda_2 f_A(\overrightarrow{AA_2}).$$

Par définition de f_A, le terme de droite est $\lambda_1 \overrightarrow{f(A)f(A_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(A)f(A_2)}$, qui est donc $\overrightarrow{f(A)G'}$ avec G' le barycentre de $(f(A), 1-\lambda_1-\lambda_2), (f(A_1), \lambda_1), (f(A_2), \lambda_2)$ par la formule fondamentale. Le raisonnement analogue dit que le terme de gauche est $f_A(\overrightarrow{AG})$ où G est le barycentre de $(A, 1-\lambda_1-\lambda_2), (A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2)$. Par définition, c'est donc $\overrightarrow{f(A)f(G)} = \overrightarrow{f(A)G'}$ par préservation des barycentres, donc l'égalité ci-dessus est respectée et f est bien affine. $\square$

Définition 2.26 (Coordonnées barycentriques)**.**

Soit $(A_0, \cdots, A_n)$ un repère affine de E.

Pour tout point M de E, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ de somme 1 tel que M est le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ la famille pondérée par ces poids. On appelle ce $(n+1)$-uplet les *coordonnées barycentriques* de M dans cette famille (ou ce repère).

De plus, si $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées de M dans le repère affine, les coordonnées barycentriques sont définies par $\lambda_i = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$ (P).

Exercice 2.27. Etant donné trois points non alignés A, B, C dans un plan affine E, donner les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) de :

— A, B, C.

— Les milieux des côtés de ABC.

— Le centre de gravité du triangle ABC.

Déterminer également en fonction des coordonnées barycentriques une caractérisation des points des côtés, des points des médiatrices, et de l'intérieur du triangle.

Voici un dernier résultat plutôt utile pour les coordonnées barycentriques.

Proposition 2.28. *Soit (A, B, C) un repère affine du plan E. Pour trois points M, M', M'' de coordonnées barycentriques respectives $(x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')$ dans le repère affine, les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Par linéarité du déterminant et invariance du barycentre, on peut supposer que les colonnes sont normalisées de somme 1, ce qui permet d'écrire le déterminant comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & y' - y & y''_y \\ z & z'_z & z''_z \end{vmatrix} = (y' - y)(z'' - z) - (y'' - y)(z' - z).$$

Cette valeur est aussi celle du déterminant de $\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}$ dans le repère affine (A, B, C) (en développant grâce à $\overrightarrow{AM} \;= y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$ et la même chose pour M', M''). Sa nullité équivaut donc à dire que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ sont colinéaires, c'est-à-dire à l'alignement des trois points. □

On peut ainsi définir des parties du plan (typiquement les droites et les coniques) par équations barycentriques qui ont l'avantage d'une plus grande symétrie entre les coordonnées.

2.3.2 Convexité

Comme les exemples élémentaires le montrent, les barycentres *à coefficients positifs* ont un intérêt particulier, qui concerne la notion de *convexité*. Hormis les premières définitions (de nature élémentaire), cette notion est assez subtile et nous allons détailler pourquoi.

Définition 2.29 (Partie convexe)**.** Soit E un espace affine et $\mathcal{C} \subset E$ une partie non vide.

— La partie $\mathcal{C}$ est *convexe* si pour tous $A, B \in \mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{C}$, autrement dit pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{C}$.

— Par associativité du barycentre, une partie non vide de E est convexe si et seulement si elle est stable par barycentres à coefficients tous positifs (par associativité du barycentre) $^{(P)}$.

— Une intersection de parties convexes non vide est encore convexe $^{(P)}$, et pour $\mathcal{P}$ non vide quelconque, on définit donc $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ *l'enveloppe convexe de* $\mathcal{P}$ comme l'intersection des parties convexes la contenant. C'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de $\mathcal{P}$ $^{(P)}$.

— Toute partie convexe de E est connexe $^{(P)}$.

Remarque 2.30. Les fonctions convexes $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont les fonctions dont l'épigraphe est convexe.

Exercice 2.31. Dessiner des parties non connexes mais non convexes, convexes et ouvertes, convexes et compactes, convexes et non compactes...

Exercice 2.32. Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (fermés ou non), et que les boules (pour toute norme d'espace vectoriel réel) de E sont toujours convexes.

Voici quelques résultats de nature topologique sur les convexes.

Proposition 2.33. *Soit E un espace affine et $\mathcal{C}$ une partie convexe de E.*

(a) (lemme d'accessibilité) Si $A \in \mathcal{C}^\circ$ et $B \in \overline{\mathcal{C}}$, alors le segment ouvert $]AB[$ est inclus dans $\mathcal{C}^\circ$.

(b) L'intérieur de $\mathcal{C}$ est vide ou convexe et l'adhérence de $\mathcal{C}$ est convexe.

(c) Si $\mathcal{C}$ est compact,e c'est l'enveloppe convexe de sa frontière.

Démonstration. Quitte à vectorialiser en un point, on peut supposer que E est un espace vectoriel normé.

(a) Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $B(A,r) \subset \mathcal{C}$. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, $B((1-t)A + tB, (1-t)r) \subset \mathcal{C}$ (faire un dessin). En effet, tout élément de cette boule s'écrit $M = ((1-t)A + tB) + x$ avec $\|x\| \leq (1-t)r$, de sorte que $A + x/(1-t) \in B(A,r) \subset \mathcal{C}$, d'où $M \in \mathcal{C}$ par convexité. En appliquant ceci pour tout $t \in [O,1[$, on en déduit bien que $(1-t)A + tB \in \mathcal{C}^\circ$.

(b) Si l'intérieur de $\mathcal{C}$ est non vide, par le (a) il est convexe. Pour l'adhérence, si $A, B \in \overline{\mathcal{C}}$, on peut écrire $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$ et $B = \lim_{n\to+\infty} B_n$ avec $A_n, B_n \in \mathcal{C}$. Alors, par continuité de la combinaison convexe, pour tout $t \in [0,1]$

$$(1-t)A + tB = \lim_{n\to+\infty} (1-t)A_n + tB_n \in \overline{\mathcal{C}},$$

donc l'adhérence est bien convexe.

(c) Comme $\mathcal{C}$ est fermée, l'enveloppe convexe de sa frontière est bien dans $\mathcal{C}$, il reste à montrer l'inclusion réciproque, soit donc M dans cette enveloppe convexe. Si M est dans la frontière c'est immédiat, donc supposons le contraire. Alors, $M \in \mathcal{C}^\circ$ et en prenant une droite D passant par M, $D \cap \mathcal{C}$ est une partie convexe compacte de D donc un segment $[AB]$ avec $M \in]AB[$. Par construction, ni A ni B ne peut être intérieur (sinon cela prolongerait le segment inclus dans $\mathcal{C}$) et M en est une combinaison convexe.

$\square$

Théorème 2.34 (Carathéodory)**.** *Soit E un espace affine de dimension n et $\mathcal{P}$ une partie de E.*

Alors,

$$\mathrm{Conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i | A_i \in \mathcal{P}, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}.$$

Autrement dit, tout élément de $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ *peut s'écrire comme combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Par récurrence descendante, il suffit de démontrer que pour tout élément de $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ qui s'écrit comme combinaison convexe de $p+2$ éléments de $\mathcal{P}$ avec $p \geq n$, on peut le réécrire comme combinaison convexe de $p+1$ éléments parmi ceux-ci.

Supposons donc qu'en tant que barycentre,

$$M = \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_i A_i,$$

où les coefficients λ_i sont positifs et de somme 1, et chaque $A_i \in \mathcal{P}$.

Comme $p+2 > n+1$, ces points ne peuvent pas être affinement indépendants et (quitte à les réordonner), on peut supposer qu'en tant que barycentre

$$A_{p+1} = \sum_{i=0}^{p} \mu_i A_i$$

avec les coefficients μ_i de somme 1, mais qui ne sont plus nécessairement positifs. Avec cette écriture, on a en posant $\mu_{p+1} = -1$, d'après la formule de Leibniz :

$$\sum_{i=0}^{p+1} \mu_i \overrightarrow{A_0 A_i} = 0$$

et donc pour tout $k \leq p$ tel que $\mu_k \neq 0$,

$$\overrightarrow{A_0 A_k} = - \sum_{\substack{0 \leq i \leq p+1 \\ i \neq k}} \frac{-\mu_i}{\mu_k} \overrightarrow{A_0 A_i},$$

c'est-à-dire que A_k est le barycentre des $(A_i, -\mu_i/\mu_k)_{(i \neq k)}$ (le poids total est égal à 1 car $\sum_{i=0}^{p+1} \mu_i = 0$). Par associativité des barycentres, on peut donc écrire pour un tel k :

$$M = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p+1 \\ i \neq k}} \left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) A_i$$

En choisissant l'indice k tel que λ_k/μ_k est minimal et positif (en particulier $\lambda_k > 0, \mu_k \neq 0$), on a alors $\lambda_i - \lambda_k \mu_i/\mu_k \geq 0$ pour tout i (le cas $\mu_i < 0$ impose automatiquement $\lambda_i - \lambda_k \mu_i/\mu_k \geq 0$). Nous avons donc bien écrit M sous la forme d'un barycentre (à coefficients positifs et poids total 1) de $p+1$ points de $\mathcal{P}$. □

Corollaire 2.35. *Si $\mathcal{P}$ est compact, alors* $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ *aussi.*

Démonstration. Avec les mêmes notations, l'application $\mathcal{P}^{n+1} \times T \to \mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ qui à un $(n+1)$-uplet de $\mathcal{P}$ et un $(n+1)$-uplet de coefficients positifs de somme 1 associe le barycentre du système est continue, et l'ensemble T de ces $(n+1)$-uplets est fermé borné dans $\mathbb{R}^{n+1}$ donc compact. L'application est surjective par le théorème de Carathéodory, ce qui prouve que $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ est compact en tant qu'image d'un compact par une application continue. □

Théorème 2.36 (Hahn-Banach géométrique). *Soit E un espace affine, $\mathcal{C}$ une partie convexe ouverte de E et F un sous-espace affine de E n'intersectant pas $\mathcal{C}$. Il existe alors un hyperplan H de E contenant F et n'intersectant pas $\mathcal{C}$.*

Corollaire 2.37 (Séparation des convexes fermés). *Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux convexes fermés de E disjoints, il existe un hyperplan H de E qui sépare strictment $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, c'est-à-dire que chacun est inclus dans l'un ou l'autre demi-plan ouvert d'un côté de l'hyperplan.*

Définition 2.38 (Points extrémaux). Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de l'espace affine E. Un point A de $\mathcal{P}$ est *extrémal* s'il ne peut pas s'écrire comme milieu de deux points distincts de $\mathcal{P}$.

Exercice 2.39. Montrer qu'un point A de $\mathcal{P}$ est extrémal si et seulement si on ne peut pas écrire $P \in]A, B[$ avec $A, B \in \mathcal{P}$.

Théorème 2.40 (Krein-Milman). *Dans un espace affine E, toute partie convexe de E est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Théorème 2.41 (Helly). *Soit E un espace affine de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille d'au moins $n+1$ parties convexes de E telle que :*

- *L'intersection de $(n+1)$ parties de la famille $\mathcal{F}$ n'est jamais vide.*
- *$\mathcal{F}$ est finie ou toutes les parties de $\mathcal{F}$ sont compactes.*

Alors, l'intersection de toutes *les parties de $\mathcal{F}$ est non vide.*

2.4 Applications affines remarquables et groupe affine

.

Pour cette section, on décrira simplement les types intéressants d'applications affines avant d'expliquer la structure du groupe affine.

Lemme 2.42. *Pour $f : E \to E$ affine, si $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est un isomorphisme alors f admet un unique point fixe.*

Remarque 2.43. Ce n'est pas une condition nécessaire pour avoir un point fixe (penser aux translations).

Démonstration. Prenons un point O de E. Comme $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est surjective, on peut écrire

$$\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{OM} - \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{f(M)f(O)},$$

pour un certain point M, et alors par relation de Chasles et simplification, $\overrightarrow{Mf(M)} = 0$ donc $f(M) = M$. Ce point est unique car si N est un autre point fixe, $\vec{f}(\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$ donc $\overrightarrow{MN} = 0$ cette fois par injectivité. □

On peut donc maintenant faire une liste d'applications affines remarquables f d'un espace affine E.

- Translations :
  Elles sont caractérisées par $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$, et alors déterminées par un vecteur $\vec{u}$ (qu'on nomme alors vecteur de translation). De plus, pour tout $g \in \mathrm{GAff}(E)$ [(P)],
  $$g \circ t_{\vec{u}} \circ g^{-1} = t_{\vec{g}(\vec{u})}.$$
  Les translations forment donc un sous-groupe distingué $\mathcal{T}(E)$ de $\mathrm{GAff}(E)$.

- Homothéties de rapport $\lambda \neq 1$:
  Elles sont caractérisées par $\overrightarrow{f} = \lambda \operatorname{Id}_{\overrightarrow{E}}$, avec un unique point fixe appelé *centre* d'après le lemme précédent.
  Les translations et homothéties forment un groupe appelé *groupe des dilatations* (caractérisé par le fait que la partie linéaire est une homothétie non nulle), également distingué dans $\mathrm{GAff}(E)$.
- Projections :
  Si F est un sous-espace affine et $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ tels que $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, tout élément de E s'écrit alors de manière unique sous la forme $M = M_F + \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{G}}$ avec $M_F \in F$ et $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{G}} \in \overrightarrow{G}$ et on peut définir la *projection sur F parallèlement à* $\overrightarrow{G}$ par
  $$\pi_{F,\overrightarrow{G}}(M_F + \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{G}}) = M_F,$$
  ou bien alternativement par $\pi_{F,\overrightarrow{G}}(M) = M_F$ le seul point de F tel que $\overrightarrow{MM_F} \in \overrightarrow{G}$ $^{(P)}$.
  On a bien $\pi^2_{F,\overrightarrow{G}} = \pi_{F,\overrightarrow{G}}$ et réciproquement, toute application affine vérifiant cette égalité est une projection affine $^{(P)}$(il suffit d'exhiber un point fixe puis d'arguments vectoriels).
- Symétries :
  Dans le même contexte que précédemment, on peut définir la *symétrie par rapport à F parallèlement à G* par
  $$s_{F,\overrightarrow{G}}(M_F + \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{G}}) = M_F - \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{G}}.$$
  Toute involution affine s de E est une symétrie affine et F est l'ensemble de ses points fixes $^{(P)}$(utiliser le milieu de $[Ms(M)]$ pour un point M).
- Symétrie glissées :
  Si $s : E \to E$ vérifie que $\overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle (i.e. une involution), il existe une unique symétrie affine $s_{F,\overrightarrow{G}}$ et un unique vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$ tel que
  $$s = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_{F,\overrightarrow{G}}.$$
  En effet, pour l'existence, s^2 est une translation et on fixe $\overrightarrow{v}$ la moitié du vecteur de translation, de sorte que $t_{-\overrightarrow{v}} \circ s$ a un point fixe et est donc une symétrie affine. Pour l'unicité, $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont uniquement déterminés par $\overrightarrow{s}$, et un point fixe de $t_{-\overrightarrow{v}} \circ s$ détermine F.

Proposition 2.44 (Structure du groupe affine)**.** *En fixant un point-base O, le groupe affine E est le produit semi-direct*
$$\mathrm{GAff}(E) = \mathcal{T}(E) \rtimes \mathrm{GAff}_O(E)$$
où $\mathrm{GAff}_O(E)$ est le sous-groupe des transformations fixant O, canoniquement isomorphe à $\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})$.

Pour ceux qui connaissent la définition formelle de produit semi-direct, cela implique que $\mathrm{GAff}(E) \cong \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si $\dim E = n$.

Dans tous ces arguments, on retrouve une stratégie : se ramener au cas vectoriel à partir d'un point fixe s'il existe, sinon utiliser une translation.

La même méthode sera à l'oeuvre pour les théorèmes classiques présentés ci-dessous.

2.5 Théorèmes classiques de la géométrie affine

Proposition 2.45. *Une transformation affine de E est une dilatation si et seulement si elle transforme toute droite de E en une droite parallèle à la première.*

Démonstration. Si f est une dilatation, pour tout vecteur $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}$, l'image $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$ est un vecteur non nul et multiple de $\overrightarrow{AB}$ comme $\overrightarrow{f}$ est une homothétie non nulle, donc $(f(A)f(B))$ est une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, soit parallèle à (AB).

Réciproquement, soit f une application affine qui envoie toute droite de E sur une droite parallèle. Soient $A, B \in E$ distincts. Alors, $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ est non nul et proportionnel à $\overrightarrow{AB}$ par hypothèse (car ce sont des vecteurs directeurs respectivement de (AB) et $f(AB)$), mais ce premier vecteur est $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$ par définition de la partie linéaire. Nous avons donc démontré (en utilisant tous les A, B distincts) que tout vecteur non nul de $\overrightarrow{E}$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$, ce qui prouve que $\overrightarrow{f}$ est une homothétie (exercice classique). □

Pour les théorèmes suivants, nous avons besoin d'une notation :

Définition 2.46. Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{E}$ (non nuls) sont proportionnels, on note $\frac{\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u}}$ le scalaire λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Théorème 2.47 (Thalès, version générale)**.** *Soient H, H', H'' trois hyperplans parallèles distincts de l'espace affine E et $(D_i)_{i\in I}$ une famille de droites de E dont aucune n'est faiblement parallèle à H. On peut donc noter, pour tout $i \in I$, A_i (resp. A'_i, A''_i) l'unique point d'intersection de D_i avec H (resp. H', H''). Alors, la quantité*

$$\frac{\overrightarrow{A_iA''_i}}{\overrightarrow{A_iA'_i}}$$

est indépendante de i. Réciproquement, si pour un $i \in I$ on a un point $A \in (A_iA'_i)$ tel que

$$\frac{\overrightarrow{A_iA}}{\overrightarrow{A_iA'_i}}$$

est égal à cette valeur commune, alors $A = A''_i$ et en particulier il appartient à H''.

Exercice 2.48. Faire un dessin de la situation, et écrire les cas particuliers où E est un plan affine et où il y a seulement deux droites D_1 et D_2. Faire également le lien avec le rapport $\frac{A''_1A''_2}{A'_1A'_2}$.

Démonstration. La preuve sera bien facilitée par le lemme suivant (en exercice) :

Lemme 2.49. *Si les points $A, B, C \in E$ sont alignés et distincts et $f : E \to E'$ est une application affine injective sur la droite (AB),*

$$\frac{\overrightarrow{f(A)f(C)}}{\overrightarrow{f(A)f(B)}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}},$$

autrement dit f préserve l'alignement, les rapports de longueur et l'orientation $^{(P)}$.

Reprenons les notations de l'énoncé du théorème, fixons $i \in I$ et considérons la projection π_i sur D_i parallèlement à H (ou, ce qui revient au même, à H' ou H'' car ils sont parallèles). Pour un autre $j \in I$, $\pi_i(A_j)$ appartient à D_i (vu l'image de la projection), mais de telle sorte que le vecteur $\overrightarrow{A_j\pi_i(A_j)}$ appartienne à $\overrightarrow{H}$ (et cela le détermine uniquement). Le seul choix possible est donc $\pi_i(A_j) = A_i$, et il en est de même pour A'_j et A''_j. On a alors

$$\frac{\overrightarrow{A_iA''_i}}{\overrightarrow{A_iA'_i}} = \frac{A_jA''_j}{A_jA'_j}$$

en utilisant le lemme, ce qui prouve le sens direct du théorème de Thalès. La réciproque vient de l'unicité : pour un tel point A, on a par hypothèse

$$\overrightarrow{A_iA} = \frac{\overrightarrow{A_iA''_i}}{\overrightarrow{A_iA'_i}}\overrightarrow{A_iA'_i} = \overrightarrow{A_iA''_i}$$

donc $A = A''_i$. □

Voici maintenant trois théorèmes (faire un dessin pour chacun).

Théorème 2.50 (Pappus). *Soient A, B, C trois points d'une droite D d'un plan affine E et A', B', C' trois points d'une droite D' distincte de D.*

Si (AB') est parallèle à $(A'B)$ et (BC') est parallèle à $(B'C)$, alors (AC') est parallèle à $(A'C)$.

Démonstration. Commençons par le cas où D et D' s'intersectent en un point O. Considérons alors l'homothétie f de centre O envoyant A sur B et l'homothétie g de centre O envoyant B sur C. Alors, f envoie (AB') sur une droite parallèle passant par B, donc $(A'B)$ par hypothèse, et elle préserve $D' = (OB)$ donc elle envoie nécessairement B' sur A'. De même, g envoie C' sur B', de sorte que $f \circ g$ envoie C' sur A' par composition, mais aussi A sur C. L'image de (AC') est donc $(A'C)$, et comme $f \circ g$ est une homothétie, ces deux droites sont donc parallèles.

Si D et D' ne s'intersectent pas, elles sont parallèles (c'est l'endroit où on doit supposer que l'espace ambiant est un plan !). On considère alors f la translation envoyant A sur B et g la translation envoyant B sur C. Par parallélisme, ces deux applications affines préservent globalement D et D', et le reste de l'argument ci-dessus est valide mot à mot en remplaçant homothétie par translation. □

Théorème 2.51 (Desargues). *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un espace affine E sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors, les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont soit concourantes soit parallèles deux à deux.*

Démonstration. Pour commencer, comme (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, les quatre points A, A', B, B' sont coplanaires (même si C et C' ne sont pas forcément dans ce même plan, faire un dessin). Les deux droites (AA') et (BB') sont donc parallèles ou d'intersection égale à un singleton.

Si (AA') et (BB') s'intersectent en un unique point O, considérons l'homothétie f de centre 0 envoyant A sur A'. Elle fixe alors (OB) mais envoie (AB) sur une droite parallèle (en tant que dilatation) passant par A' (l'image de A), qui ne peut être que $(A'B')$ par hypothèse. Elle envoie donc B sur l'intersection de $(OB) = (OB')$ et $(A'B')$ soit B'. Maintenant, notons C'' l'image de C par f. Comme c'est une dilatation, $(A'C'')$ est parallèle à (AC), donc C'' est sur la parallèle à (AC) passant par A', qui n'est autre que $(A'C')$, et on peut reprendre l'argument avec (BC) (comme $f(B) = B'$ donc C'' appartient aussi à $(B'C')$, ce qui impose que $C'' = C'$. Comme c'est une homothétie de centre O, on a donc O, C et C' alignés, donc $O \in (CC')$.

Si (AA') et (BB') sont parallèles, on considère la translation f envoyant A sur A', et par la même suite d'arguments grâce à cette hypothèse de parallélisme, f envoie B sur B', puis C sur C' grâce à quoi $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$, en particulier les droites engendrées par ces points sont bien parallèles. □

Remarque 2.52. Les preuves de ces derniers théorèmes ont un point en commun qui guide leur compréhension : il s'agit d'exhiber une transformation affine (ou deux) qui transforme la première suite de points en la deuxième. Ainsi, le théorème de Desargues se résume en le fait qu'il existe une dilatation envoyant ABC sur $A'B'C'$, et le théorème de Pappus fait la même chose avec deux dilatations de même nature, envoyant (A, B) sur (B', A') et (B, C) sur (C', B').

Théorème 2.53 (Ménélaüs). *Soient ABC un triangle du plan affine et $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ $C' \in (AB)$. Alors, A', B' et C' sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1$$

Démonstration. Considérons les homothéties respectivement $h_{A'}$ de centre A' et de rapport $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}$, $h_{B'}$ de centre B' et de rapport $\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}$, et $h_{C'}$ de centre C' et de rapport $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}$.

La composition $f = h_{A'} \circ h_{B'} \circ h_{C'}$ est une dilatation, et envoie B sur B en suivant les compositions. C'est donc une homothétie de rapport la quantité de l'énoncé.

Si cette quantité vaut 1, f est l'identité donc $h_{C'}^{-1} = h_{A'} \circ h_{B'}$ et les centres des homothéties doivent être alignés.

Réciproquement, si A', B' et C' sont alignés, considérons la dilatation $h = h_{A'} \circ h_{B'}$. Elle envoie A sur B et B' sur un point de $(A'B')$, donc elle stabilise globalement (AB) et $(A'B')$, et fixe leur unique point d'intersection qui est C' (comme $C' \in (A'B')$ par hypothèse). C'est donc une homothétie de centre C', de sorte que $h \circ h_{C'}$ est aussi une homothétie de centre C', mais fixe également B donc c'est l'identité, ce qui prouve que le rapport est 1. □

Théorème 2.54 (Ceva). *Soient ABC un triangle du plan affine et $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ $C' \in (AB)$. Alors, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1.$$

Démonstration. La démonstration sera donnée en exercice, avec une version qui utilise les barycentres. □

3 Géométrie euclidienne

Dans cette section, on admet connues les notions usuelles de produit scalaire sur un espace vectoriel réel, la norme (notée $\|\cdot\|$), l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème de Pythagore, les isométries vectorielles, les sous-espaces orthogonaux etc... pour se concentrer sur le cas spécifique des espaces affines.

Par concision, on notera généralemenent $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y de $\overrightarrow{E}$, mais on pourra également parfois le noter $\langle x, y\rangle$ en cas d'ambiguité.

3.1 Définitions de base

Définition 3.1 (Espace affine euclidien)**.**

— Un espace affine E est *euclidien* si sa direction $\overrightarrow{E}$ est munie d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. Pour tous points A, B de E, on note alors
$$d(A,B) = AB := \|\overrightarrow{AB}\|,$$
ce qui définit une distance sur E (P).

— Dans un espace affine euclidien E, un *repère orthonormal* est un repère affine $(O, \mathcal{B})$ dont la base $\mathcal{B}$ est un repère orthonormal de $\overrightarrow{E}$.

— Une *isométrie affine* entre deux espaces affines euclidiens E, E' est une application $E \to E'$ qui conserve les distances, c'est-à-dire telle que pour tous $A, B \in E$, $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$ pour les distances respectives de E' et E. En particulier, en choisissant un repère orthonormal de E, celui-ci est isométrique à $\mathbb{R}^{\dim E}$.

— Une isométrie f de E dans lui-même est *directe* (ou un *déplacement*) si elle préserve l'orientation (ce qui revient à dire que $\overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ (P)) et *indirecte* (ou un *antidéplacement*) sinon.

Proposition 3.2. *Une application $f : E \to E'$ entre deux espaces affines euclidiens E, E' est une isométrie si et seulement si elle est affine et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle (i.e. une application orthogonale).*

Démonstration. Supposons que f est affine et $\overrightarrow{f}$ une isométrie vectorielle entre $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E'}$. Alors, pour tous points $A, B \in E$,
$$f(A)f(B) = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\|_{E'} = \|\overrightarrow{AB}\|_E = AB$$
donc f est bien une isométrie.

Réciproquement, supposons que f conserve les distances entre E et E'. Fixons un point $O \in E$. Alors, pour tous points $M, M' \in E$, on a par bilinéarité du produit scalaire
$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}(OM^2 + OM'^2 - MM'^2) \tag{1}$$
en développant $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}\|^2$. Comme l'isométrie f conserve les distances par hypothèses, on en déduit (en appliquant également la formule sur E') que $\overrightarrow{f(O)f(M)} \cdot \overrightarrow{f(O)f(M')} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$ donc l'application f_O définie par $f_O(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(O)f(O+\overrightarrow{v})}$.

Considérons alors l'application $\varphi : \vec{E} \to (\vec{E'})^*$ définie par

$$\varphi(\vec{v})(\vec{w}) = f_O(\vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Pour tous $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \vec{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\vec{w} = f_0(\vec{v})$ pour un certain $\vec{v}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\vec{v_1} + \vec{v_2})(\vec{w}) &= f_0(\lambda\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot \vec{w} \\
&= f_0(\lambda\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot f_0(\vec{v}) \\
&= (\lambda\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot \vec{v} \\
&= \lambda\vec{v_1} \cdot \vec{v} + \vec{v_2} \cdot \vec{v} \\
&= \lambda f_0(\vec{v_1}) \cdot \vec{w} + f_0(\vec{v_2}) \cdot \vec{w} \\
\varphi(\lambda\vec{v_1} + \vec{v_2})(\vec{w}) &= \lambda\varphi(\vec{v_1})(\vec{w}) + \varphi(\vec{v_2})(\vec{w}).
\end{aligned}$$

Cette égalité s'étend par linéarité de chaque $\varphi(\vec{v})$ à tous les $\vec{w} \in \operatorname{Vect} f_0(\vec{E})$, mais ensuite pour $\vec{w} \in (\operatorname{Vect} f_0(\vec{E}))^\perp$, par construction $\varphi(\vec{v})(\vec{w}) = 0$ pour tout $\vec{v} \in \vec{E}$ donc les deux termes sont égaux et nuls. On a donc finalement cette égalité par linéarité pour tout $\vec{w} \in \vec{E'}$, c'est-à-dire que $\varphi(\lambda\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \lambda\varphi(\vec{v_1}) + \varphi(\vec{v_2}$ et donc φ est linéaire.

Maintenant, $\psi : \vec{E'} \to (\vec{E'})^*$ qui à $\vec{w_0}$ associe $\vec{w} \mapsto \vec{w} \cdot \vec{w_0}$ est un isomorphisme, et par construction on a $\varphi = \psi \circ f_O$ d'où $f_O = \psi^{-1} \circ \varphi$ est bien linéaire (et en particulier orthogonale, on vient en fait de prouver que toute application linéaire orthogonale est automatiquement linéaire). La fonction f est donc affine. comme dans la première section préserve le produit scalaire, et cela entraîne qu'elle est linéaire et même orthogonale entre $\vec{E}$ et $\vec{E'}$ $^{(P)}$donc f est bien une isométrie affine.

□

Exercice 3.3. Montrer avec la même idée de preuve et (1) qu'il suffit de supposer pour $f : E \to E$ affine qu'elle préserve les distances entre les points d'un repère affine donné (pas forcément orthogonal) pour que ce soit une isométrie.

Exemple 3.4. Avec la proposition précédente, voici déjà plusieurs types d'isométries affines :

— Les *translations*.

— Les *symétries centrales* (i.e. homothéties de rapport -1), de partie linéaire $-\operatorname{Id}$.

— Les *symétries orthogonales* (par rapport à un sous-espace affine F) sont les symétries affines par rapport à F et parallèlement à $\vec{F}^\perp$. Le signe de leur déterminant est alors $(-1)^{\operatorname{codim} F}$. En particulier :

— Les *réflexions (orthogonales)* sont les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan, toujours de déterminant -1.

— Attention, les projections orthogonales ne sont *pas* des isométries ! D'ailleurs, leur partie linéaire n'est pas orthogonale, mais symétrique.

Exercice 3.5. Pour chacun des cas particuliers d'isométrie ι ci-dessus, identifier précisément l'isométrie conjuguée $f \circ \iota \circ f^{-1}$ pour une certaine isométrie (affine) f de E.

Définition 3.6.

Les isométries d'un espace affine euclidien E forment un groupe noté $\mathrm{Isom}(E)$ et la partie linéaire induit une surjection $\mathrm{Isom}(E) \to O(\overrightarrow{E})$ de noyau $\mathcal{T}(E)$ $^{(P)}$.

Les déplacements en forment un sous-groupe d'indice 2 (l'image réciproque de $\mathrm{SO}(E)$).

Les isométries ont la particularité d'avoir une décomposition bien définie.

Proposition 3.7 (Forme réduite)**.** *Soit $f : E \to E$ une isométrie de l'espace affine euclidien E. Il existe un unique couple $(t, \widetilde{f})$ avec t une translation et $\widetilde{f}$ une isométrie admettant au moins un point fixe, tels que*

$$f = t \circ \widetilde{f} = \widetilde{f} \circ t.$$

Démonstration. On redémontre d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.8. *Pour une application orthgonale $\varphi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$, on la décomposition orthogonale*

$$\overrightarrow{E} = \ker(\varphi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}).$$

Preuve du lemme. Soit $x \in \ker(\varphi - \mathrm{Id})$ et $y \in \overrightarrow{E}$. Alors,

$$\langle x, \varphi(y) - y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle - \langle x, y\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle - \langle x, y\rangle = 0$$

en utilisant l'hypothèse sur x, et ceci est nul par orthogonalité de φ. On a donc démontré que les espaces $\ker(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ sont orthogonaux, et leurs dimensions sont de somme $\dim E$ par le théorème du rang, ils sont donc supplémentaires orthogonaux. □

Commençons par l'unicité, qui nous fournira des conditions nécessaires sur t et $\widetilde{f}$ au passage. Le fait que $t = t_{\overrightarrow{u}}$ et $\widetilde{f}$ commutent implique que $\overrightarrow{u}$ est fixé par $\overrightarrow{f}$ (voir la section de géométrie affine). Ensuite, l'ensemble des points fixes de $\widetilde{f}$, étant non vide, est un sous-espace affine de direction $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$. Maintenant, en regardant O un point fixe de $\widetilde{f}$, $f(O) = t_{\overrightarrow{u}}(\widetilde{f}(O)) = t_{\overrightarrow{u}}(O)$ par hypothèse donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Of(O)}$. Pour un point quelconque A de E, on a alors

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{f} \ - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OA}),$$

mais d'après le lemme précédent, comme $\overrightarrow{u} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$, cette décomposition est unique, donc $\overrightarrow{u}$ est entièrement déterminé par la donnée d'une seule valeur de $\overrightarrow{Af(A)}$. (on a besoin de prendre A quelconque car si on se restreint à un point fixe O de $\widetilde{f}$, on fait déjà un choix). Ceci détermine enfin uniquement $\widetilde{f}$ comme $t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$, et O en est alors clairement un point fixe.

Réciproquement, prouvons l'existence de cette décomposition. On repart d'un point $A \in E$ quelconque et on écrit d'après le lemme $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$. Il s'agit maintenant simplement de montrer que $\widetilde{f} := t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ a bien un point fixe, car la commutativité est déjà impliquée, $\widetilde{f}$ ayant la même partie linéaire que f. Par construction, il existe donc B tel que

$$\overrightarrow{A\widetilde{f}(A)} = \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(-\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{\widetilde{f}(A)\widetilde{f}(B)} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\widetilde{f}(A)} + \overrightarrow{\widetilde{f}(B)B},$$

et ceci prouve que B est fixé par $\widetilde{f}$. □

3.2 Applications orthogonales remarquables et groupe orthogonal

On se concentre ici sur le groupe des isométries affine, avec le résultat classique suivant.

Proposition 3.9. *Soient deux points distincts A et B d'un espace affine euclidien. Il existe une unique réflexion (orthogonale) s_H échangeant A et B, et son hyperplan H est l'hyperplan médiateur de $[AB]$.*

Démonstration. Tout d'abord, la réflexion par l'hyperplan médiateur H échange bien A et B. En effet, cet hyperplan est l'hyperplan affine passant par le milieu I de $[AB]$ et de direction $(AB)^{\perp}$: pour tout point M de E,

$$AM^2 = BM^2 \Longleftrightarrow AI^2 + IM^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IM} = BI^2 + IM^2 + 2\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{IM}$$

et le terme de droite se simplifie en $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$. Ceci prouve que l'ensemble des points à égale distance de A et B est bien cet hyperplan.

Les projections orthogonales de A et B sur H sont bien I toutes les deux, car on a

$$A = I + \frac{\overrightarrow{BA}}{2}, \quad B = I + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

et le vecteur appartient bien à $\overrightarrow{H}^{\perp}$. Par définition de la symétrie, on a alors

$$s_H(A) = A - 2\frac{\overrightarrow{BA}}{2} = B.$$

Montrons maintenant l'unicité, supposons que $s_{H'}(A) = B$ pour un certain hyperplan affine. Alors, par conservation de la norme et comme $s_{H'}$ est l'identité sur H, pour tout point $M \in H$, $AM = s_H(A)s_H(M) = BM$, donc H' est inclus dans l'hyperplan médiateur, donc égal par dimension.

□

Proposition 3.10. *Dans un espace affine euclidien E, toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus* $\dim(E) + 1$ *réflexions orthogonales.*

Démonstration. On fixe un repère affine $(A_0, \cdots, A_n)$ de E et une isométrie f de E. On va démontrer le résultat par récurrence descendante sur le cardinal k de $\mathcal{I}^c = \{1, \cdots, n\} \backslash \mathcal{I}$ où $\mathcal{I} := \{0 \leq i \leq n, f(A_i) = A_i\}$. Si ce cardinal est nul, tous les points du repère sont fixés donc f est l'identité. Supposons maintenant le résultat montré pour tout $i \leq k$ avec $k \leq n$, montrons-le pour $k+1$. On a donc $|\mathcal{I}| = n - k$. Soit $i \in \mathcal{I}^c$. On considère H_i l'hyperplan médiateur entre $f(A_i)$ et A_i et $g = s_{H_i} \circ f$. Pour tout indice $j \in \mathcal{I}$, $f(A_j) = A_j$ donc $f(A_i)A_j = f(A_i)f(A_j) = A_iA_j$ comme f est une isométrie, autrement dit A_j appartient à H_i, et est ainsi fixé par s_{H_i}. La composée g fixe donc tous les $A_j, j \in \mathcal{I}$ et A_i, de sorte qu'elle s'écrit par récurrence comme produit d'au plus k réflexions et en recomposant à gauche par s_{H_i}, on en déduit le résultat pour f. □

3.3 Barycentres, convexité et espaces euclidiens

On va ici mentionner quelques applications intéressantes de la structure euclidienne aux problèmes de barycentres et convexité (ou l'inverse).

Définition 3.11. (Fonction scalaire de Leibniz et lignes de niveau)

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ une famille finie de points pondérés de l'espace affine euclidien E.

La *fonction scalaire de Leibniz* associée est définie sur E par

$$f(M) = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot MA_i^2.$$

Alors :

- Si le poids total λ est non nul, on a $f(M) = \lambda \cdot MG^2 + \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot GA_i^2$, en développant $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$ avec G le barycentre de la famille.
- Si $\lambda = 0$, la fonction vectorielle de Leibniz associée est constante égale à un certain vecteur $\vec{v}$ et alors pour tous points O, M, $f(M) - f(O) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v}$

Exercice 3.12. Décrire la forme des solutions de $f(M) = c$ avec c constante si $\lambda \neq 0$ puis si $\lambda = 0$.

Montrer que pour $\lambda \neq 0$ et G le barycentre du système, on a la formule de Huygens

$$f(G) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{\substack{i,j\in I \\ i\neq j}} \lambda_i \lambda_j A_i A_j^2.$$

On peut maintenant mentionner une notion intéressante pour aborder la convexité.

Proposition 3.13 (Projection sur un convexe fermé et hyperplan d'appui)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe fermée de E affine euclidien.*

Pour tout $x \notin \mathcal{C}$, il existe un unique $p_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$ tel que $d(x, p_{\mathcal{C}}(x)) = d(x, \mathcal{C})$, et alors pour tout $y \in \mathcal{C}$, $\langle \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)x}, \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)y} \rangle \leq 0$ (P).

Remarque 3.14. La projection sur $\mathcal{C}$ définit une application 1-lipschitzienne de $E \backslash \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, et en particulier continue. En effet, pour tous $x, y \notin \mathcal{C}$, en appliquant les inégalités,

$$\langle \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)x}, \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)p_{\mathcal{C}}(y)} \rangle \leq 0, \quad \langle \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(y)y}, \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(y)p_{\mathcal{C}}(x)} \rangle \leq 0.$$

En conséquence,

$$\begin{array}{rcl} \|p_{\mathcal{C}}(x)p_{\mathcal{C}}(y)\|^2 & = & \langle \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)p_{\mathcal{C}}(y)}, \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)x} + \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yp_{\mathcal{C}}(y)} \rangle \\ & \leq & \langle \overrightarrow{p_{\mathcal{C}}(x)p_{\mathcal{C}}(y)}, \overrightarrow{xy} \rangle \leq \|xy\| \|p_{\mathcal{C}}(x)p_{\mathcal{C}}(y)\| \end{array}$$

ce qui impose $\|p_{\mathcal{C}}(x)p_{\mathcal{C}}(y)\| \leq \|xy\|$ comme souhaité.

Définition 3.15 (Hyperplan d'appui)**.** On reprend $\mathcal{C}$ une partie convexe fermée de E affine euclidien.

On appelle *hyperplan d'appui de $\mathcal{C}$* tout hyperplan de E rencontrant $\mathcal{C}$ et qui délimite un demi-espace fermé contenant $\mathcal{C}$.

Proposition 3.16. *Pour $\mathcal{C}$ un convexe fermé de E, en tout point de la frontière de $\mathcal{C}$ il passe un hyperplan d'appui de $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*

Démonstration. Soit A un point de la frontière de $\mathcal{C}$. Comme $A \notin \mathcal{C}^\circ$, on peut choisir une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $E\backslash\mathcal{C}$ tendant vers $\mathcal{C}$, et on note pour chacun H_n le projeté de A_n sur $\mathcal{C}$. Comme $d(A_n, A)$ tend vers 0, $d(A_n, H_n) = d(A_n, \mathcal{C}) \leq d(A_n, A)$ tend vers 0 également et donc $(H_n)_n$ tend aussi vers A. On note $\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{H_nA_n}/H_nA_n$. Les vecteurs $\overrightarrow{u_n}$ forment une suite de vecteurs unitaires donc appartenant à la sphère unité de E qui est compacte, de sorte qu'on peut en extraire une suite convergeant vers un certain vecteur $\overrightarrow{u}$. Pour tout $M \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, par l'inégalité de projection sur un convexe fermé,

$$\overrightarrow{H_nM} \cdot \overrightarrow{u_n} \leq 0.$$

En passant à la limite, on obtient alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} \leq 0$, ainsi tous les points M de $\mathcal{C}$ sont dans le demi-espace défini par cette inéquation.

Maintenant, pour $B \notin \mathcal{C}$, si A est la projection de B sur $\mathcal{C}$, elle appartient à la frontière de $\mathcal{C}$ et une suite $(A_n)_n$ comme précédemment peut être définie sur le segment ouvert $]B, A[$. Dans ce cas, $\overrightarrow{u}$ est égal à $\overrightarrow{AB}/AB$ et pour $M \in \mathcal{C}$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} \leq 0$ alors que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = AB^2 > 0$. On a donc exhibé un demi-espace fermé qui contient $\mathcal{C}$ mais pas B, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est bien l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. □

Remarque 3.17. Au cours de la démonstration, on fabrique en fait un point B tel que $p_{\mathcal{C}}(B) = A$. En effet, en prenant $B = A + \overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$ pour tout $M \in \mathcal{C}$, ce qui prouve que $B \notin \mathcal{C}$ et ensuite, pour tout $M \in \mathcal{C}$,

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} \geq AB^2$$

donc la distance de B à $\mathcal{C}$ est bien $d(A, B)$, ce qui caractériste la projection.

Exercice 3.18. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Hahn-Banach géométrique : tout sous-espace affine F de E affine ne rencontrant pas un convexe ouvert $\mathcal{C}$ est contenu dans un hyperplan affine H tel que $H \cap \mathcal{C} = \emptyset$ également.

(a) Démontrer ce résultat en dimension 2 à partir de la projection sur le convexe fermé $\overline{\mathcal{C}}$ à l'aide d'un hyperplan d'appui (en ayant muni E d'une structure euclidienne).

(b) Montrer qu'on peut supposer que E est un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{C}$ une partie convexe de E (en particulier, elle ne contient pas 0).

(c) Montrer qu'on peut même supposer que F est maximal (en dimension) parmi les sous-espaces vectoriels de E ne rencontrant pas $\mathcal{C}$. Il s'agit alors de démontrer que F est un hyperplan.

(d) On considère $p : E \to E/F$ la projection dans l'espace vectoriel quotient. Montrer que $p(\mathcal{C})$ est toujours une partie convexe de E/F qui ne contient pas $p(0)$. Utiliser un argument analogue au (a) pour conclure.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les isométries en petite dimension. En dimension 1, il est facile de voir qu'on a seulement les translations et les symétries centrales $^{(P)}$.

3.4 Isométries en dimension 2 et 3

On va d'abord rappeler quelles sont les isométries vectorielles en dimension 2. Pour cela, il suffit de se ramener après choix d'une base orthonormale à $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et donc aux groupes de matrices correspondants, ce qu'on fait pour commencer.

On a

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Ensuite, tout élément de $O_2(\mathbb{R})$ est de déterminant ± 1, donc en utilisant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$O_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

En conséquence, les isométries vectorielles directes en dimension 2 sont les rotations, et les isométries vectorielles indirectes en dimension 2 sont les réflexions orthogonales : en effet, S_θ a pour valeurs propres 1 et -1 et est après calcul $^{(P)}$la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ avec la base canonique identifiée à $(1, i)$, on a

$$R_\theta(z) = e^{i\theta} z, \quad S_\theta(z) = e^{i\theta}\overline{z}.$$

On en déduit directement grâce à la forme réduite la classification des isométries affines en dimension 2.

Proposition 3.19 (Isométries affines en dimension 2)**.** *Soit E un plan affine euclidien. Alors, les isométries de E sont :*

- *Les translations.*
- *Les rotations (qui incluent les symétries centrales).*
- *Les réflexions par rapport à une droite D.*
- *Les réflexions glissées, déterminées par leur droite fixe et leur vecteur de translation (appartenant à $\overrightarrow{D}$).*

Démonstration. Le seul cas à éclaircir est celui des rotations : si la partie linéaire est une rotation, pourquoi a-t-elle un point fixe (et donc une forme réduite triviale) ? La réponse est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.20. *si $f : E \to E$ sur un espace affine est affine et que $\overrightarrow{f}$ n'a pas pour valeur propre 1, alors f a un unique point fixe dans E.*

En effet, soit f une telle application affine et prenons O un point quelconque de E. Alors, comme $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{Id}$ est injective sur $\overrightarrow{E}$ elle est bijective, et on peut donc écrire

$$\overrightarrow{Of(O))} = -(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{Id})(\overrightarrow{OB})$$

pour un unique $B \in E$. Cette égalité est équivalente à

$$\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{f(B)f(O)},$$

ce qui par relation de Chasles donne $f(B) = B$. On a donc trouvé un point fixe et il est unique par construction de B et équivalence des égalités. □

Exercice 3.21. Pour chacun des cas, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, donner l'écriture en complexes de chacun des types d'isométrie affine.

Ensuite, pour deux isométries f et g, identifier la nature de $g \circ f$ suivant les cas.

Comme en dimension 2, la dimension 3 commence par des rappels sur la forme du groupe spécial orthogonal.

Proposition 3.22. *Toute matrice $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est conjuguée dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}.$$

Si $M \neq I_3$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale directe dans laquelle M a cette matrice, on dit que M est la rotation d'angle θ autour de l'axe $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$.

Si $M \in O_3^-(\mathbb{R})$, elle est conjuguée via une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}.$$

Pour une base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ dans laquelle M a cette matrice, on dit que M est l'antirotation d'angle θ et d'axe $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$.

Remarque 3.23. Pour pouvoir écrire ceci sans ambiguité, il faut avoir choisi une orientation de l'espace, mais aussi un vecteur directeur de l'axe de rotation (sinon on pourrait prendre $R_{-\theta}$ également).

Dans le cas où $\det M = 1$: si $R_\theta = I_2$ on retrouve l'identité, et si $R_\theta = -I_2$ on retrouve les symétries orthogonales par rapport aux droites.

Dans le cas où $\det M = -1$, on retrouve de même $-I_3$ et les réflexions.

Démonstration. On va commencer avec un lemme.

Lemme 3.24. *Pour toute matrice $M \in O_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$, il existe une droite ou un plan de $\mathbb{R}^n$ stable par M et alors son orthogonal est également stable par M.*

Preuve du lemme. Si M admet une valeur propre réelle, elle a une droite propre donc stable par définition. Sinon, elle admet une valeur propre complexe (non réelle) λ et un vecteur propre complexe X associé, c'est-à-dire que $MX = \lambda X$. En identifiant les parties réelles et imaginaires de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} M\,\mathrm{Re}(X) &= \mathrm{Re}(\lambda)\,\mathrm{Re}(X) - \mathrm{Im}(\lambda)\,\mathrm{Im}(X) \\ M\,\mathrm{Im}(X) &= \mathrm{Re}(\lambda)\,\mathrm{Im}(X) + \mathrm{Im}(\lambda)\,\mathrm{Re}(X) \end{aligned}$$

Comme λ est non réelle, cela implique en particulier que $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ ne sont pas colinéaires, et le plan formé par ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est bien stable par M.

Dans les deux cas, l'orthogonal est encore stable par M : si $F \subset \mathbb{R}^n$ est stable par M orthogonale, pour tout $Y \in F^\perp$ et tout $X \in F$,

$$\langle X, M \cdot Y \rangle = \langle M \cdot (M^{-1}X), M \cdot Y \rangle = \langle M^{-1}X, Y \rangle = 0$$

car M est un automorphisme et stabilise F donc $M^{-1}F = F$, et ainsi on a montré que $M \cdot Y \in F^{\perp}$.

□

En appliquant ce lemme à notre situation, comme l'orthogonal d'une droite en dimension 3 est un plan, on a toujours un plan stable P, sur lequel M induit encore une isométrie vectorielle. En choisissant la bonne orientation sur ce plan (via une base orthonormale $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, M induit une isométrie directe donc la matrice de M dans la base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est bien une matrice de rotation R_θ. En complétant $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ en une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ avec un vecteur $\overrightarrow{e_1} \in P^{\perp}$ bien orienté, comme $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ doit être stable par M, c'est un vecteur propre avec une valeur propre réelle, qui ne peut être que ± 1 car M conserve la norme. Le déterminant de M détermine alors la valeur propre. □

Ceci permet en passant au cas affine d'obtenir la classification suivante.

Proposition 3.25. *Les isométries de l'espace euclidien E de dimension 3 sont :*

- *Les translations.*
- *Les rotations (qui incluent les symétries par rapport aux droites), autrement dit les isométries qui fixent point par point une droite affine D donnée et agissent comme une rotation sur un plan de E orthogonal à D.*
- *Les vissages (rotation puis translation le long de l'axe, qui incluent les symétries glissées par rapport aux droites).*
- *Les réflexions orthogonales.*
- *Les réflexions glissées.*
- *Les antirotations (qui ne sont pas des réflexions glissées), autrement dit les isométries qui stabilisent une droite affine donnée D et dont la partie linéaire est $-I$ sur $\overrightarrow{D}$, puis agissent comme une rotation différente de $\pm I$ sur un plan de E orthogonal à D.*

Démonstration. En combinant le résultat précédent avec les formes réduites, il reste simplement à montrer que toute isométrie affine de E dont la partie linéaire est une antirotation où la rotation R_θ n'est pas $\pm I_2$ a automatiquement un point fixe, mais c'est encore une conséquence du lemme 3.20.

□

3.5 Angles

Une application de cette la classification des isométries en dimension 2 est la notion d'angle orienté.

Proposition 3.26. *Etant donné deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ du plan euclidien, il existe une unique rotation (linéaire) envoyant $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$.*

Définition 3.27 (Angles orientés et géométriques)**.** On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur les couples de vecteurs unitaires du plan euclidien par

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\mathcal{R}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ si et seulement si il existe une rotation envoyant $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{v'}$.

Alors :

1. L'*angle orienté* $(\vec{u}, \vec{v})$ est la classe d'équivalence de $(\vec{u}, \vec{v})$ (et on étend la définition aux vecteurs positivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$).
2. L'ensemble des angles orientés est muni d'une structure de groupe naturelle telles que pour des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a la relation de Chasles (P)
$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}).$$
3. La rotation R envoyant $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ ne dépend que de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ (P), et on appelle *mesure de l'angle* un choix de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que R a pour matrice R_θ dans une base orthonormée directe. Elle est donc définie à $2\pi\mathbb{Z}$ près.
4. L'*angle géométrique* $(\vec{u}, \vec{v})$ revient à identifier les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ pour tous $\vec{u}, \vec{v}$ unitaires. L'ensemble des angles géométriques n'est plus un groupe. La mesure d'un angle géométrique $(\vec{u}, \vec{v})$ est le $\theta \in [0, \pi]$ tel que θ est une mesure d'un des angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\vec{v}, \vec{u})$ (et en particulier, elle ne dépend pas de l'orientation).
5. Dans un plan affine euclidien, considérant trois points A, B, C avec $B, C \neq A$, on l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en normalisant en des vecteurs unitaires et de même pour la mesure. L'angle géométrique est noté $\widehat{BAC}$. Par construction, si $(A'B')$ et parallèle à (AB) et $(A'C')$ est parallèle à (AC), avec les vecteurs directeurs de même sens, l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ est le même que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (P).
6. Les isométries directes en dimension 2 préservent les angles, et les isométries indirectes envoient tout angle sur son opposé (P).
7. Si on identifie le plan euclidien à $\mathbb{C}$ muni de sa base naturelle, si A, B, C sont trois points d'affixes z_A, z_B et z_C, la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'argument de $(z_C - z_A)/(z_B - z_A)$ (P). Ceci permet de donner explicitement des équations portant sur les angles.

Exercice 3.28. Retrouver avec cette définition les notions d'angle nul, d'angle droit, d'angle plat et les rotations correspondantes. Peut-on encore les définir pour des angles géométriques ?

Exercice 3.29. Montrer que les rotations préservent les angles orientés, et que les réflexions orthogonales du plan envoient un angle orienté sur son opposé.

3.6 Un peu de trigonométrie

Proposition 3.30. *Soient A, B, C trois points distincts du plan. Alors, la sommes des mesures des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à π modulo 2π.*

Démonstration. Considérons la symétrie centrale de centre C, qui envoie A sur A' et B sur B'. Elle préserve les angles (car elle est directe), donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$ par égalité des vecteurs (bien noter qu'ici on n'a pas de point commun à l'angle mais ce n'est pas grave quand on parle d'angles entre vecteurs), et alors la relation de Chasles nous donne que la somme des angles est égale à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$ qui est un angle plat. $\square$

Exercice 3.31. Le résultat est-il encore valable avec les mesures des angles géométriques ?

Nous allons conclure ce passage sur les angles avec des résultats relatifs aux angles inscrits dans des cercles et de cocyclicité.

Proposition 3.32 (Théorème de l'angle inscrit)**.** *Soient A, B, C trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O du plan. Alors,*

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

En particulier, ce dernier angle est indépendant du choix de A à B, C fixés.

De plus, un point D du plan distinct de B, C appartient au cercle si et seulement si

$$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Corollaire 3.33. *Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan affine euclidien. Alors, ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si*

$$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Exercice 3.34. Montrer ce corollaire en admettant la proposition.

Voici un autre corollaire très utile (certes plus facile à montrer tout seul).

Corollaire 3.35. *Si ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de telle sorte que $[BC]$ en est un diamètre, alors il est rectangle en A.*

Preuve du théorème de l'angle inscrit. Comme O est sur la médiatrice de AB par hypothèse, la réflexion orthogonale par cette médiatrice fixe O et échange A et B donc

$$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

Par ailleurs, la somme des angles d'un triangle appliquée à OAB nous dit que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

est plat, donc on a montré que l'angle

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

est plat. De même pour l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})$. La différence des deux angles est alors nulles, et par la relation de Chasles elle vaut

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) - 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$

ce qui prouve la première assertion. L'indépendance du choix de A montre que si D appartient au cercle, on a bien égalité des angles, et réciproquement supposons que $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. En particulier, cet angle est non nul (A, B, C ne sont pas alignés) et donc on peut définir $\mathcal{C}'$ le cercle cironscrit à BCD, de centre O'. En réutilisant la première assertion, on a $(\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'C}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et les deux centres O, O' sont sur la médiatrice de $[BC]$. Considérant la rotation (affine) R_O de centre O envoyant B sur C et $R_{O'}$ de centre O' envoyant B sur C aussi, la composition $R_{O'}^{-1} R_O$ est une isométrie directe affine fixant B et d'angle nul par hypothèse, ce qui lui impose d'être l'identité donc $O = O'$ et D appartient bien au cercle $\mathcal{C}$. □

Voici une application de ce résultat très utile pour déterminer des longueurs d'angles en fonction de côtés dans un triangle.

Proposition 3.36 (Formule des sinus)**.**

Soit ABC un triangle non plat. On note $\widehat{A}$ l'angle géométrique formé par les côtés en A, et de même pour B et C. Alors,

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{CA}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}.$$

Démonstration. On se place dans le cercle cironscrit au triangle (de centre l'intersection I des médiatrices, rappelons-le). Soit A' le point opposé à A dans le cercle $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire tel que $[AA']$ en est un diamètre). Grâce au théorème de l'angle inscrit, $\widehat{B} = \widehat{AA'C}$, mais le sinus de ce dernier angle est égal à AC/AA', donc $\frac{CA}{\sin \widehat{B}}$ n'est autre que AA', qui est le diamètre du cercle, et on obtient le même résultat pour les autres rapports par rôle symétrique.

□

Références