ÉNS Lyon — Algèbre
Agrégation — 2017-2018

Formes quadratiques générales

Dans les exercices concernés, sauf mention contraire, q est une forme quadratique sur le k-espace vectoriel E de dimension finie, et $\mathrm{car}(k) \neq 2$.

Exercice 1. [Calculs explicites]

(a) Décomposer suivant l'algorithme de Gauss les formes quadratiques suivantes :

1. $q(x,y,z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 2(z^2+t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{R}^4$.
3. La forme quadratique déterminant sur $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Donner les signatures et rangs des formes quadratiques suivantes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j$.

(c) Pour toute matrice $P \in M_n(k)$, donner le rang de la forme quadratique $M \mapsto \mathrm{Tr}(PM^2)$.

Exercice 2. [Applications de la réduction de Gauss]

Supposons qu'on a une décomposition de la forme

$$q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i^2,$$

avec $\ell_1, \cdots, \ell_n \in E^*$ linéairement indépendantes et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in k$.

En déduire :

— Une expression de sa forme bilinéaire polarisée.
— Une base orthogonale de q.
— Le rang de q et son noyau.
— Le discriminant de q.

Exercice 3. [Identité du parallélogramme]

(a) Montrer que toute forme quadratique q sur le k-espace vectoriel E vérifie l'identité du parallélogramme

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?

(b) Montrer que pour $k = \mathbb{C}$, il existe des fonctions vérifiant cette identité sans être des formes quadratiques.

Supposons maintenant que le corps de base est $k = \mathbb{R}$, et soit $q : E \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'identité du parallélogramme.

Soit la fonction B sur $E \times E$ définie par $B(x,y) = (q(x+y) - q(x) - q(y))/2$ est bien symétrique.

(d) Avec trois applications de l'identité du parallélogramme, montrer que B est additive à droite, puis à gauche.

(e) En déduire par densité des rationnels que B est bilinéaire, donc que q est une forme quadratique.

Exercice 4. [Cône isotrope]

On note $C(q)$, appelé cône isotrope, l'ensemble des vecteurs isotropes de q auquel on ajoute 0.

(a) Montrer que $C(q)$ est stable par multiplication scalaire et que $\mathrm{Ker}\, q \subset C(q)$.

(b) Si $C(q) \neq \mathrm{Ker}\, q$, montrer que q est surjective dans K. Donner ensuite un contre-exemple.

(c) Montrer que si q est non dégénérée et F ne contient pas de vecteur isotrope non nul, alors $F \oplus F^{\perp} = E$.

(d) Montrer que si $C(q) \neq \{0\}$ et q est non dégénérée, alors $\mathrm{Vect}(C(q)) = E$.

Exercice 5. Soient deux vecteurs anisotropes distincts x, y de E tels que $q(x) = q(y)$.

(a) Montrer qu'il existe au plus une réflexion de E envoyant x sur y.

(b) Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions envoyant x sur y (indice : montrer que $x - y$ ou $x + y$ est anisotrope).

(c) En déduire les orbites de $E \backslash C(q)$ sous l'action de $O(q)$.

Exercice 6. [Plans hyperboliques] On dit que E est un plan hyperbolique si $\dim E = 2$ et qu'il existe une base (e_1, e_2) de E (dite hyperbolique) dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que dans un plan hyperbolique, tout vecteur isotrope se complète en une base hyperbolique.

(b) Montrer que pour E de dimension 2, q est soit dégénérée, soit anisotrope, soit hyperbolique.

(c) Montrer que pour E de dimension au moins 2 et q non dégénérée, si $x \in E$ est isotrope, il est contenu dans un plan P tel que $q_{|P}$ est hyperbolique.

Exercice 7. [SETI et SETIM] Un sous-espace vectoriel F de E est dit totalement isotrope (SETI) si chacun de ses vecteurs est isotrope. Un tel espace maximal pour l'inclusion est dit SETIM. On note $\nu(q)$ la dimension maximale d'un SETI.

(a) Montrer que F est un SETI si et seulement si $F \subset F^\perp$.

(b) Montrer que si F est un SETI,

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker} B_q).$$

En déduire que $\nu(q) \leq \dim E - \operatorname{rg} q/2$.

(c) Soient F_1 et F_2 deux SETIM et $F = F_1 \cap F_2$. Soient des espaces vectoriels G_1 et G_2 tels que $F \oplus G_1 = F_1$ et $F \oplus G_2 = F_2$. Montrer que $G_1 \cap G_2^\perp = G_2 \cap G_1^\perp = 0$, et en déduire que les SETIM ont tous même dimension.

(d) Donner cette dimension dans le cas $K = \mathbb{R}$ et q de signature (p, q).