ENS Lyon — Algèbre

Préparation Agrégation — 2017-2018

Feuille d'exercices
Révisions d'algèbre linéaire

Lorsque l'espace ambiant n'est pas indiqué, c'est un K-espace vectoriel E de dimension finie avec K quelconque.

Exercice 1.

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & -4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer leur rang.

(b) Calculer pour chacune d'entre elles son noyau et son image (par générateurs ou relations, au choix).

Exercice 2.

Discuter selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système $\left\{ \begin{array}{ccc} 3x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & m \\ x + y - z & = & 1 \end{array} \right.$.

Exercice 3 (Endomorphismes nilpotents)**.** Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ tel que $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$ pour un certain entier $r \geq 1$. On dit que u est *nilpotent d'indice* r.

(a) Quelle forme a le polynôme minimal de u ?

(b) Soit $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \ldots, u^{r-1}(x)\}$ est libre dans E.

(c) En déduire la forme de la matrice de u dans une base adaptée

(d) En déduire que $r \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si la famille $\{x, \ldots, u^{r-1}(x)\}$ est une base de E.

(e) Supposons que u est d'indice de nilpotence maximal i.e. $r = \dim E$. Montrer que le *commutant de* u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $u \circ g = g \circ u$, est égal à $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \ldots, u^{r-1})$.

Exercice 4 (Valeurs propres)**.**

(a) Un endomorphisme admet-il nécessairement des valeurs propres ?

(b) Soit x un vecteur propre de u. Montrer que pour tout polynôme $P \in K[X]$, x est vecteur propre de $P(u)$ pour $P(\lambda)$. Qu'en déduire sur $P(u)$ si u est diagonalisable ?

(c) Deux matrices semblables dans $M_n(K)$ ont-elles le même polynôme caractéristique ? Le même polynôme minimal ? Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 5 (Matrice compagnon)**.**

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La *matrice compagnon* de P, carrée de taille n, est définie par

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est exactement P.

(b) Montrer que le polynôme minimal de C_P est également P.

(c) Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$, et donner une expression de C_P^{-1} dans ce cas.

Exercice 6 (Sous-espaces cycliques)**.**

Soit $u \in \operatorname{End} E$. Pour tout $x \in E$ non nul, on note $I_{u,x}$ l'idéal

$$I_{u,x} := \{P \in K[X] \mid P(u)(x) = 0\},$$

$\pi_{u,x}$ son générateur unitaire et $E_{u,x}$ le sous-espace engendré par les $u^k(x)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $\pi_{u,x}$ divise toujours π_u le polynôme minimal de u.

(b) Lier la dimension de $E_{u,x}$ et le degré de $\pi_{u,x}$, en déduire une caractérisation des vecteurs propres de u.

(c) Exhiber une base de $E_{u,x}$ dans laquelle la matrice de $u_{|E_{u,x}}$ est la matrice compagnon de $\pi_{u,x}$.

(d) On suppose maintenant que le corps de base K est infini. Montrer qu'une union finie de sous-espaces stricts de E ne peut pas être égale à E.

(e) En considérant les diviseurs unitaire de π_u, en déduire qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

(f) On dit que u est *cyclique* si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\pi_u = \chi_u$, si et seulement si sa matrice dans une certaine base est la matrice compagnon de χ_u.

Exercice 7.

On se place sur un corps de base $K = \mathbb{F}_q$ fini.

(a) Montrer que $M \in M_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si $M^q = M$.

(b) Montrer que $M \in M_n(K)$ est trigonalisable si et seulement si pour un certain $k \geq 1$,

$$(M^q - M)^k = 0.$$

Exercice 8.

(a) On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$, et $A^3 + 3A^2 + 3A = -I_n$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. -1 est la seule valeur propre de A ;
2. A est trigonalisable ;
3. A est diagonalisable ;
4. $\det A = (-1)^n$;
5. $A + I_n$ est nilpotent.

(b) Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$, telle que $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)(X-3)(X^2+1)$.

1. A quelle condition A est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. A quelle condition A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
3. Selon les cas, quel est le polynôme minimal de A ?

Exercice 9 (Trigonalisation)**.**

On suppose que $u \in \operatorname{End}(E)$ a son polynôme caractéristique χ_u scindé sur K. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base de u dans laquelle u est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que u est *trigonalisable*.

(a) Montrer que si u est trigonalisable, χ_u est forcément scindé sur K.

(b) On reprend les hypothèses de l'exercice, avec $n = \dim(E)$. Montrer qu'il suffit que u stabilise un drapeau $(F_i)_{0 \leq i \leq n}$, c'est-à-dire une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = E, \quad u(F_i) \subset F_i.$$

(c) Montrer que pour tout $F \subset E$ stable par u, on peut définir un endomorphisme induit $\overline{u}$ de E/F. Montrer que si $\pi : E \to E/F$ est la projection canonique et $\overline{u}$ stabilise un sous-espace G de E/F, alors u stabilise $\pi^{-1}(G)$.

(d) Montrer qu'il existe une droite propre F_1 de u.

(e) En combinant (c) et (d), montrer par récurrence sur la dimension que u est trigonalisable.

(f) *(Preuve alternative par dualité)* Montrer par dualité que u stabilise un hyperplan de E. En déduire le résultat par récurrence.

Exercice 10 (Classes de conjugaison de matrices complexes).

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ semblables à A.

(a) Montrer que si A est diagonalisable, pour tout $B \in \overline{\mathcal{C}(A)}$, $\chi_B = \chi_A$ et B est annulé par le polynôme minimal de A. En déduire que $\mathcal{C}(A)$ est un fermé.

(b) Réciproquement, supposer que $\mathcal{C}(A)$ est fermé. Montrer qu'on peut supposer A triangulaire supérieure. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Donner l'expression de l'endomorphisme associé à A dans la base $(e_1/p, \cdots, e_n/p^n)$ pour tout entier $p \geq 1$.

(c) Par passage à la limite, en déduire que A est en fait diagonale sous ces hypothèses.

(d) Montrer que si A est nilpotente, l'adhérence de $\mathcal{C}(A)$ dans $M_n(\mathbb{C})$ contient la matrice nulle avec la même idée que le (c).

(e) Réciproquement, montrer que si cette adhérence contient 0, alors A est nilpotente.

(f) Que dire de $\mathcal{C}(A)$ si A est une homothétie ? Réciproquement, montrer que si $\mathcal{C}(A)$ est bornée, A est une homothétie.

Exercice 11 (Décomposition de Dunford).

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K, on peut écrire d'une unique manière

$$u = d + n,$$

avec d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. C'est ce qu'on appelle la *décomposition de Dunford.*

(a) Donner la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Soit u un tel endomorphisme, on pose

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i}.$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in K$ deux à deux distincts et les n_i entiers naturels positifs.

Montrer que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i, \qquad F_i := \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E)^{n_i}.$$

Que peut-on dire de chaque projection $E \to F_i$ suivant cette décomposition ? Les F_i sont appelés *sous-espaces caractéristiquse de u.*

(c) On pose d l'endomorphisme de E défini comme la multiplication par λ_i sur chaque F_i. Montrer que d et $n = u - d$ satisfont toutes les hypothèses de la décomposition de Dunford.

(d) Montrer que les d et n définis en (c) sont des polynômes en u. En déduire l'unicité de la décomposition de Dunford.

(e) Donner une forme matricielle optimale dans une base adaptée de la décomposition de Dunford de u.

(Preuve alternative de l'existence via la méthode de Newton)

On va écrire cette preuve sous forme matricielle pour changer. Soit $M \in M_n(K)$ avec $K \subset \mathbb{C}$, de polynôme caractéristique χ_M scindé dans $\mathbb{C}$. On écrit

$$\chi_M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i} \in K[X],$$

avec les λ_i distincts deux à deux et complexes.

(g) Montrer que

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i) = \frac{\chi_M}{\chi_M \wedge \chi_M'} \in K[X],$$

puis que $P(M)$ est nilpotente et $P'(M)$ inversible.

(h) Montrer que l'algèbre $K[M]$ engendrée par M dans $M_n(K)$ est commutative et stable par inversion. En déduire que dans cette algèbre, une somme d'inversible et de nilpotent est inversible, et un produit quelconque par un nilpotent est encore nilpotent.

(i) On considère la suite de matrices de $K[A]$ suivante : $A_0 = A$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n+1} = A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1}.$$

Montrer que cette suite est toujours bien définie, et par récurrence que

$$P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n$$

pour une certaine matrice B_n de $K[A]$.

(j) En déduire qu'à partir d'un certain rang n, la suite est stationnaire et la matrice A_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On pose $D = A_n$ et $N = A - D$, montrer que ces matrices forment la décomposition de Dunford de A.

Exercice 12.

Soient deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Montrer qu'elles sont alors semblables sur $\mathbb{R}$.