Représentations linéaires de groupes finis

Dans ce polycopié, le corps de base est noté k. Pour tous les grands théorèmes, on supposera $k = \mathbb{C}$ par défaut, mais dans certains exercices, il s'agira de discuter le cas des autres corps.

Les espaces vectoriels considérés seront toujours supposés de dimension finie, et les groupes représentés supposés finis.

Les représentations linéaires de groupes finis concernent directement les leçons 101 et 107, mais sont largement pertinentes pour les leçons 102, 104, 105, 106, 154, 155, et j'en passe.

1 Représentations linéaires, définitions et résultats fondamentaux

1.1 Définitions et constructions de base

Définition.

— Une *représentation linéaire* du groupe G sur un k-espace vectoriel V est, de manière équivalente :
(1) Une action à gauche de G sur V par applications linéaires.
(2) Un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.
On note ainsi (V, ρ) une représentation de G, très souvent notée V lorsqu'on souhaite rendre implicite le morphisme ρ. Sa dimension est la dimension de V.

— Si V est une représentation de G et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V, on dit que W est une *sous-représentation* de V si l'action de G laisse stable W, et on définit alors l'action de G sur W par restriction.

— Une représentation V de G est *irréductible* si $V \neq \{0\}$ et il n'existe pas de sous-représentation $W \subset V$ différente de $\{0\}$ et V.

— Une *application G-linéaire* (ou *G-équivariante*) entre deux représentations V et W de G est une application k-linéaire φ telle que pour tous $g \in G$ et $v \in V$,

$$\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v).$$

Dans ce cas, le noyau et l'image de φ sont alors naturellement des sous-représentations de V et W respectivement. On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ le k-espace vectoriel des applications G-linéaires de V dans W.

— Deux représentations V et W de G sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de G-équivariant entre V et W. Ceci définit une relation d'équivalence sur les représentations de G.

— Pour toute représentation V de G, on note V^G l'ensemble des éléments de V invariants par toute l'action de G. C'est une sous-représentation de V sur laquelle G agit trivialement.

— Une représentation *complexe* de G est une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de G.

— La *représentation triviale* de G est la représentation sur $V = k$ pour laquelle tout élément de G agit comme l'identité.

Exercice 1.

(a) Trouver des représentations naturelles des groupes cycliques (voire abéliens) et diédraux.

(b) Trouver certaines d'entre elles qui sont irréductibles. Que penser pour les groupes abéliens ?

(c) Si G agit sur un ensemble fini X, considérons formellement une famille $(e_x)_{x\in X}$ et l'espace vectoriel

$$V = \oplus_{x\in X}\ k \cdot e_x,$$

Donner une structure de représentation de G à V. Quelle forme ont les matrices des éléments de G dans la base canonique ?

La définition suivante établit toutes les constructions de base pour les représentations.

Définition.
On suppose que V et W sont deux représentations de G.
— Les espaces vectoriels $V \oplus W$ et $V \otimes W$ sont munis naturellement d'une structure de représentations de G par les formules (pour tous $g \in G$, $v \in V$, $w \in W$)

$$g \cdot (v \oplus w) := g \cdot v \oplus g \cdot w, \quad g \cdot (v \otimes w) := g \cdot v \ \otimes g \cdot w.$$

— Si V est une représentation de G, son dual V^* en est une aussi, définie par l'action (pour $g \in G, \ell \in V^*, v \in V$)

$$(g \cdot \ell)(v) := \ell(g^{-1} \cdot v),$$

— Plus généralement, $\mathrm{Hom}(V, W)$ est muni d'une structure de représentation de G par la formule

$$(g \cdot \varphi)(v); = g \cdot (\varphi(g^{-1} \cdot v)),$$

pour tous $g \in G$, $v \in V$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
En particulier, pour cette structure de représentation, $\mathrm{Hom}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$.

Exercice 2. Vérifier que les formules ci-dessus définissent bien des représentations de G.

L'exemple suivant est fondamental pour la suite.

Définition (Représentation régulière)**.**
Soit G un groupe fini. La *représentation régulière* de G, notée R_G, est, de manière équivalente :
• La représentation associée à l'action par translation à gauche de G sur elle-même, suivant le (c) de l'exercice précédent.
• L'espace vectoriel $R_G = \mathcal{F}(G, k)$ muni de l'action de G définie pour $f \in \mathcal{F}(G, k), g, h \in G$ par

$$(g \cdot f)\,(h) := f(g^{-1}h).$$

Exercice 3.
Justifier que ces deux définitions sont bien équivalentes.

1.2 Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (Théorème de Maschke)**.**
Soit G un groupe fini. Toute représentation complexe de G se décompose en somme directe de sous-représentations irréductibles.

Démonstration. Par récurrence sur la dimension, il suffit de démontrer que si $W \subset V$ est une sous-représentation non triviale de la représentation V de G, il existe W' une sous-représentation de V telle que $V = W \oplus W'$.

Pour ce faire, il suffit de définir arbitrairement un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ sur V (qui n'a aucun lien avec la structure de représentation de G, mais on n'a qu'à décider qu'une certaine base de V est orthonormale), puis définir un second produit scalaire $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$ par

$$\langle v, v' \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot v, g \cdot v' \rangle_0.$$

Ceci est encore un produit scalaire hermitien sur V, qui a acquis la propriété additionnelle (par effet de moyenne) d'être invariant par l'action de G. On prend alors l'orthogonal W' de W pour ce produit scalaire, qui est donc stable par l'action de G par construction. C'est donc une sous-représentation de G, ce qui conclut la preuve. $\square$

Exercice 4.
(a) Montrer que ce théorème n'est pas vrai pour le corps de base $k = \mathbb{F}_p$ et le groupe des matrices triangulaires supérieures de $M_2(\mathbb{F}_p)$ agissant naturellement sur ${\mathbb{F}_p}^2$. (b) En déduire quelle est l'hypothèse exacte sur le corps de base et G pour vérifier le théorème de Maschke.

Une question importante se pose maintenant, comme d'habitude : cette décomposition en irréductibles est-elle unique ?

Remarque. Considérons $V = k^n$ sur lequel G agit trivialement. Toutes les droites de V sont des sous-représentations irréductibles de G, et on peut écrire V comme somme directe de droites de plusieurs manières différente. On doit donc parler de décomposition en irréductibles à isomorphisme près.

Théorème 2 (Lemme de Schur).
Soient V et W des représentations complexes irréductibles et $\varphi : V \to W$ une application G-linéaire. Alors :
— *Soit φ est un isomorphisme, soit $\varphi = 0$.*
— *Si $V = W$, $\varphi = \lambda I$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$..*

Démonstration. Soit $\varphi : V \to W$ une application G-linéaire. Alors, comme dit plus haut, $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont des sous-représentations, donc par irréductibilité $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ ou V et $\operatorname{Im}\varphi = 0$ ou W. Les deux seuls cas compatibles sont $\varphi = 0$ ou $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ et $\operatorname{Im}\varphi = W$, c'est-à-dire que φ est un isomorphisme. Pour la deuxième assertion, il suffit d'utiliser que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc φ a une certaine valeur propre λ. Alors, $\varphi - \lambda I$ a un noyau non trivial, ce qui force d'après le premier point à avoir $\varphi - \lambda I = 0$. □

Exercice 5.
Comme pour le théorème de Maschke, dire plus généralement pour quels corps de base le lemme de Schur est toujours vrai.

On déduit du lemme de Schur le résultat d'unicité attendu

Proposition 1.
Pour toute représentation complexe V de G, on a une unique décomposition en irréductibles

$$V \cong W_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus W_r^{n_r},$$

au sens où 'l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme G-linéaire, les W_i sont irréductibles et non G-isomorphes deux à deux, et s'il existe une autre décomposition, il existe quitte à réindexer des G-isomorphismes $W_i \cong W_i'$ et les exposants n_i sont les mêmes.

Corollaire 2. *Pour cette décomposition, on a*

$$\operatorname{End}_G(V) \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Exercice 6. Prouver ce corollaire grâce au lemme de Schur.

Preuve de l'unicité de la décomposition. Supposons qu'on ait un G-isomorphisme

$$\varphi : W_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus W_r^{n_r} \cong W_1' \oplus \cdots \oplus {W'}_s^{n_s}$$

avec les W_i irréductibles non isomorphes deux à deux, et de même pour les W_i'. Pour tous $i \in \{1, \cdots, r\}, j \in \{1, \cdots, s\}$ considérons $\varphi_{i,j} : W_i^{n_i} \to {W'}_j^{n_j}$ la composition de φ avec l'inclusion $W_i^{n_i} \to V$ et la projection $V \to W_j'$ données par la décomposition. Par le lemme de Schur, pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, il y a au plus un j pour lequel $\varphi_{i,j}$ n'est pas nulle, c'est-à-dire celui pour leque $W_i \cong W_j'$. De plus, ce j existe forcément sinon φ ne serait pas injective. Appliqué dans les deux sens, on en déduit que $r = s$ et que quitte à réindexer, pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $W_i \cong W_i'$. Le morphisme φ s'écrit alors

$$\varphi = \varphi_{1,1} \oplus \cdots \varphi_{r,r},$$

et comme c'est un isomorphisme, chacun des $\varphi_{i,i}$ l'est, donc $n_i = n_i'$ par égalité des dimensions. On a bien prouvé l'unicité de la décomposition au sens voulu. □

Exercice 7.

Soit le groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$ et $V = \mathbb{C}^n$ muni de l'action de $\mathfrak{S}_n$ définie par permutation des coordonnées, c'est-à-dire

$$\sigma \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

(a) Montrer que ceci définit bien une représentation linéaire de $\mathfrak{S}_n$.

(b) Trouver une droite D et un hyperplan H qui sont des sous-représentations de V telles que $V = D \oplus H$.

(c) Montrer que H est irréductible, et conclure. On appelle H muni de cette action la *représentation standard de* $\mathfrak{S}_n$.

En guise de conclusion de cette section, traitons complètement le cas des groupes abéliens.

Proposition 3.

Soit G un groupe abélien fini.

Alors, les représentations complexes irréductibles de G sont exactement les représentations de dimension 1 de G (c'est-à-dire les droites).

Plus précisément, considérons les caractères linéaires de G, c'est-à-dire les morphismes de groupes $\chi : G \to \mathbb{C}^*$.

A chaque caractère linéaire χ, on peut associer une représentation $D_\chi = (\mathbb{C}, \rho)$, où l'action de G sur $\mathbb{C}$ est définie par

$$\rho(g)(z) := \chi(g)z,$$

et on obtient ainsi exactement les représentations irréductibles de G à isomorphisme près.

Étant donné une représentation V de G, on peut écrire V sous la forme

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} D_{\chi_i}^{n_i},$$

ce qui revient à trouver une base de V pour laquelle chaque élément de G est diagonalisable.

Démonstration.

Tout d'abord, n'importe quelle représentation de dimension 1 d'un groupe est forcément irréductible, car elle n'admet déjà pas de sous-espace vectoriel strict non trivial. Il s'agit donc seulement de prouver que toutes les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 lorsque G est abélien.

Soit (V, ρ) une représentation de G. Pour tout élément $g \in G$, si n est l'ordre de G, on a $g^n = 1$ donc $\rho(g)$ est annulé par $X^n - 1$, qui est scindé à racines simples dans G. Ainsi, chaque $\rho(g)$ est diagonalisable, et ils commutent entre eux donc ils sont codiagonalisables. Il existe donc une base de diagonalisation $(e_1, \cdots, e_k)$ commune à tous les $\rho(g)$, et chaque droite $\mathbb{C} \cdot e_i$ est une sous-représentation de V. Ainsi, si V est irréductible, ce doit être une droite.

Maintenant, la définition D_χ ci-dessus donne bien une représentation car χ est un morphisme de groupes : la linearité de l'action est évidente, et pour tous $g, h \in G, z \in \mathbb{C}$.

$$\rho(gh)(z) = \chi(gh) \cdot z = \chi(g) \cdot (\chi(h) \cdot z) = \rho(g)(\rho(h)(z)).$$

Montrons réciproquement que toute représentation de dimension 1 de G est isomorphe à l'une de celles-ci. Soit D une telle représentation. En choisissant une base (e_1) de D, pour tout $g \in G$, il existe $\chi(g) \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\rho(g)(e_1) = \chi(g) \cdot e_1,$$

et on constate en retournant la suite d'égalités plus haut que ceci définit un caractère linéaire $\chi : G \to \mathbb{C}^*$. L'isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire entre $\mathbb{C}$ et D définit par $\lambda \mapsto \lambda e_1$ est alors clairement un G-isomorphisme, et donc $D \cong D_\chi$.

Pour finir, si $\chi \neq \chi'$, les représentations D_χ et $D_{\chi'}$ ne sont pas G-isomorphes. En effet, si un tel G-isomorphisme (noté φ) existait, on aurait pour tout $z \in D_\chi$, $g \in G$:

$$\varphi(z) = g \cdot \varphi(g^{-1} \cdot z) = \chi'(g) \cdot (\varphi(g^{-1} \cdot z) = \chi'(g)\chi(g)^{-1}\varphi(z)$$

par $\mathbb{C}$-linéarité de φ, ce qui est impossible lorsque $\chi(g) \neq \chi'(g)$.

Nous avons donc déterminé toutes les représentations irréductibles de G abélien fini. □

Ce cas particulier des groupes abéliens nous donne deux informations :

— La théorie des représentations est particulièrement simple pour les groupes abéliens, à tel point qu'elle en est presque superflue. *

— Pour deviner comment se décompose une représentation (V, ρ) en sous-représentations irréductibles, lorsqu'on est dans une situation assez simple, il suffit de connaître (comme ci-dessus) les valeurs propres des $\rho(g)$.

C'est une première motivation pour la partie suivante, qui va nous permettre de savoir explicitement quelles sont les sous-représentations irréductibles d'une certaine représentation fixée.

2 Caractères et fonctions centrales

Ici, encore une fois, on fixe $\mathbb{C}$ comme corps de base, mais beaucoup de choses seraient valables en plus grande généralité, ce sera apparent dans les exercices.

Définition (Caractère d'une représentation)**.**

Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Le *caractère de* V, souvent noté χ_V, est la fonction $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ définie pour tout $g \in G$ par

$$\chi_V(g) := \operatorname{Tr} \rho(g).$$

Remarque. Attention, ce caractère, contrairement aux caractères linéaires mentionnés plus haut, n'a aucune raison d'être un morphisme de groupes en général !

Remarquer aussi que le caractère de la représentation triviale est la fonction toujours égale à 1 sur G, on la notera souvent 1.

Exercice 8. Montrer que lorsque V est de dimension 1, χ_V définit bien un morphisme de groupes $G \to \mathbb{C}^*$. Dans ce cas et ce cas seulement, on parle de *caractère linéaire* ou de *caractère abélien*.

Exercice 9.

Vérifier que lorsque deux représentations de G sont isomorphes, leur caractère est le même. Peut-on pour l'instant se prononcer sur la réciproque ?

2.1 Propriétés de base des caractères

Définition (Fonctions centrales)**.**

Pour tout groupe fini G, on appelle *fonction centrale sur* G toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $g, h \in G$,

$$f(ghg^{-1}) = f(h),$$

autrement dit toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ constante sur les classes de conjugaison. On notera $\mathcal{C}(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions centrales sur G, de dimension $c(G)$ le nombre de classes de conjugaison de G.

On définit ces fonctions car *tout caractère de représentation est une fonction centrale* : en effet, si (V, ρ) est une représentation de G, on a

$$\chi_V(ghg^{-1}) = \operatorname{Tr} \rho(ghg^{-1}) = \operatorname{Tr} \rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = \operatorname{Tr} \rho(h) = \chi_V(h).$$

Proposition 4.

Pour toutes représentations V et W de G :

$$\begin{aligned}
\chi_{V \oplus W} &= \chi_V + \chi_W \\
\chi_{V \otimes W} &= \chi_V \cdot \chi_W \\
\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} &= \overline{\chi_V} \cdot \chi_W \\
\chi_{V^*} &= \overline{\chi_V} \\
\chi_V(1) &= \dim V.
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la somme directe, c'est immédiat (trace des matrices diagonales par blocs), le cas V^* est un cas particulier de $\mathrm{Hom}(V,W)$ appliqué à W la représentation triviale (de caractère 1), et on peut démontrer le résultat pour le produit tensoriel en utilisant le G-isomorphisme canonique entre $V \otimes W$ et $\mathrm{Hom}(V^*,W)$. Il reste donc seulement à trouver la formule pour $\mathrm{Hom}(V,W)$. Soit $g \in G$. Encore une fois, si N est l'ordre de G, $g^N = 1$ donc les endomorphismes de V et W respectivement associés à G sont annulés par $X^N - 1$, donc diagonalisables. On choisit $(e_1, \cdots, e_m)$ une base propre de l'action de g sur V, et $(f_1, \cdots, f_n)$ une base propre de l'action de g sur W, et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ les valeurs propres associées, de sorte que

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}, g \cdot e_i = \lambda_i e_i \quad g \cdot f_j = \mu_j f_j.$$

Définissons alors, pour tous $i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}$, $\varphi_{i,j} \in \mathrm{Hom}(V,W)$ qui envoie e_i sur f_j et est nul sur le reste de la base. Ces morphismes forment clairement une base de $\mathrm{Hom}(V,W)$, étudions-y la trace de l'action de g. Pour tout $k \in \{1, \cdots, m\}$:

$$(g \cdot \varphi_{i,j})(e_k) = g \cdot (\varphi_{i,j}(g^{-1} \cdot e_k) = g \cdot (\lambda_k^{-1} \varphi_{i,j}(e_k)).$$

Si $i \neq k$, ceci donne 0 et si $i = k$, on a alors $g \cdot (\lambda_i^{-1} f_j) = \lambda_i^{-1} \mu_j f_j$. Nous venons donc de prouver que pour tous i, j,

$$g \cdot \varphi_{i,j} = \lambda_i^{-1} \mu_j \varphi_{i,j},$$

ainsi la base construire est diagonale pour l'action de G, et

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^{-1} \mu_j = \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g).$$

En effet, les valeurs propres sont toutes des racines N-ièmes de l'unité vu le polynôme annulateur, donc égales à l'inverse de leur conjuguée, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_V(g)}.$$

Enfin, la formule pour $\chi_V(1)$ est immédiate vu la trace de la matrice identité. □

Exercice 10.
Si G agit sur un ensemble fini X et V est la représentation linéaire associée à cette action, calculer χ_V en fonction des points fixes de X par les éléments de G. En déduire :
(a) Le caractère associé à la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$
(b) Le caractère associé à la représentation régulière de G.

Exercice 11.
Dans le cas d'un sous-corps de $\mathbb{C}$, les formules pour les caractères sont-elles toujours vraies ?
Pour un corps quelconque, par quoi doit on remplacer $\overline{\chi_V}$?

2.2 Résultats fondamentaux et relations entre caractères

Le grand thème de cette section est que le caractère d'une représentation donne toute l'information nécessaire sur celle-ci, et nous allons montrer un par un tous les résultats en ce sens.

Proposition 5.
Soit (V, ρ) une représentation complexe de G.
Définissons

$$\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \quad \in \mathrm{End}(V).$$

Alors, φ est en fait un projecteur de V sur V^G, et en conséquence

$$\dim V^G = \mathrm{Tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

Démonstration. Il est évident que φ est égal à l'identité sur V^G (car chaque $\rho(g)$ y agit comme l'identité par définition de ce sous-espace). Ensuite, l'image de φ est incluse dans V^G : pour tout $v \in V$, $h \in G$,

$$h \cdot (\varphi(v)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \cdot (g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g' \cdot v = \varphi(v)$$

après réindexation. On a donc $\varphi^2 = \varphi$, et l'image de φ qui est V^G, c'est donc bien un projecteur de V sur V^G. Pour les projecteurs, on sait que leur rang est égal à leur trace, d'où le résultat. $\square$

Exercice 12.

Généraliser ce résultat à autant de corps que possible (attention à la caractéristique non nulle !)

On a maintenant suffisamment de résultats préliminaires pour établir les premières relations non triviales entre caractères, qui seront numérotées, mais pas dans l'ordre d'obtention (le but étant que la numérotation finale reflète le plus clairement l'ordre d'utilisation en pratique).

Proposition 6.

Soit G un groupe fini et V, W des représentations de G.

(a) Si V est irréductible et non triviale,

$$\sum_{g \in G} \chi_V(g) = 0 \qquad (R4).$$

(b) Si V et W sont irréductibles,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad V \cong W \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases} \qquad (R4).$$

En particulier,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_V(g)|^2 = 1 \qquad (R5).$$

Démonstration. Pour le (a), il suffit d'utiliser la proposition précédente et le fait que si V est irréductible non triviale, on a forcément $V^G = \{0\}$. Pour le (b), on utilise encore la proposition précédente appliquée à $\mathrm{Hom}(V, W)$ (rappelons que $\mathrm{Hom}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$) et on applique le lemme de Schur, ainsi que la formule pour le caractère de $\mathrm{Hom}(V, W)$. Le (a) est le (b) appliqué à W la représentation triviale. $\square$

Ces formules ont une forte odeur de produit scalaire, et on va concrétiser tout ça.

Définition.

Soit G un groupe fini. Sur l'espace vecotriel $\mathcal{C}(G)$ des fonctions centrales, définissons le produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ par

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \alpha'(g).$$

On peut donc reformuler $(R4)$ et $(R5)$: ils disent que la famille des caractères $(\chi_V)_V$ où V parcourt les représentations irréductibles non isomorphes deux à deux de G est une *famille orthonormale* de $\mathcal{C}(G)$. En conséquence, il existe au plus $c(G)$ telles représentations irréductibles, où $c(G)$ est le nombre de classes de conjugaison de G.

Exercice 13. Par quoi peut-on remplacer l'usage d'un produit scalaire hermitien lorsque le corps de base est quelconque ?

On peut en faire dire encore plus à la proposition précédente, qui permet même de remplacer l'unicité de la décomposition en irréductibles et ce de manière effective.

Proposition 7.

Soit $W_1, \cdots, W_r$ l'ensemble des représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de G.

Soit V une représentation de G, on peut donc écrire

$$V \cong W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_r^{\oplus n_r},$$

avec $n_1, \cdots, n_r$ uniquement déterminés par V (et certains d'entre eux pouvant être nuls).

Alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$,

$$n_i = \langle \chi_V, \chi_{W_i} \rangle_G.$$

En conséquence :

— *Si deux représentations de G ont le même caractère, elles sont isomorphes.*

— *Une représentation V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$, car*

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = \sum_{i=1}^{r} n_i^2.$$

Démonstration. Par les formules sur les caractères, on a

$$\chi_V = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_{W_i},$$

et le premier résultat découle de l'orthonormalité des caractères χ_{W_i} pour le produit scalaire défini.

Ensuite, si $\chi_V = \chi_{V'}$ pour une autre représentation V', la formule prouve que $n_i = n_i'$ pour tout i, et alors les représentations sont isomorphes.

Enfin, la valeur de $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G$ est une conséquence directe de l'orthonormalité, et V est irréductible si et seulement si tous ses exposants n_i sont nuls sauf un qui vaut 1, ce qui équivaut à dire que la somme des n_i^2 vaut 1. □

Notation Pour simplifier la notation de décomposition d'une représentation, on écrit souvent, à la place de ce qu'il y a ci-dessus, de manière additive :

$$V = n_1 W_1 + \cdots + n_r W_r.$$

Nous avons donc, grâce aux caractères, une manière explicite de décomposer une représentation en irréductibles, pour peu qu'on connaisse la liste (finie) de celles-ci et leurs caractères.

Un autre miracle se produit alors, qui nous permet de donner des relations entre les caractères de représentations irréductibles, résumées dans la proposition suivante.

Proposition 8.

Soit R_G la représentation régulière de G (définie en première partie), de caractère noté χ_R. Alors :

(a) Pour tout $g \in G$,

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G| & \text{si} g = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Si $W_1, \cdots, W_r$ est la liste des représentations irréductibles de G non isomorphes deux à deux, on a

$$R_G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} W_i^{\dim W_i},$$

autrement dit chaque représentation irréductible apparait exactement autant de fois que sa dimension dans la décomposition de la représentation régulière, et alors

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W_i)^2 = |G| \quad (R1).$$

(c) Pour tout $g \in G$ différent de l'élément neutre,

$$\sum_{i=1}^{r} \dim W_i \cdot \chi_{W_i}\ (g) = 0 \quad (R5).$$

Démonstration. Pour le (a), c'est évident pour $g = 1$, et sinon chaque élément non trivial de G induit une translation de la base canonique (donc sans point fixe), de sorte que les coefficients diagonaux de $\rho(g)$ dans cette base sont tous nuls, la trace est donc nulle.

Pour le (b), à cause du (a), on a

$$\langle \chi_R, \chi_{W_i} \rangle_G = \frac{1}{|G|} |G| \chi_{W_i}(1) = \dim W_i,$$

et le reste découle de la proposition précédente.

Pour le (c), on utilise le (b) et on calcule les dimensions des deux termes.

Pour le (d), on utilise le (b) et on calcule $\chi_R(g)$ grâce à la décomposition. □

On a donc établi un certain nombre de relations (linéaires ou quadratiques, essentiellement) entre les caractères des représentations irréductibles, mais il reste à comprendre combien on en a au juste. C'est le dernier grand résultat théorique de cette section, dû à Frobenius.

Théorème 3 (Frobenius)**.**

Pour tout groupe fini G, le nombre de représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de G est exactement égal au nombre $c(G)$ de classes de conjugaison de G (relation $(R0)$).

Démonstration. On note $W_1, \cdots, W_r$ ces représentations irréductibles, rappelons qu'on a montré plus haut que $r \leq c(G)$ car la famille des χ_{W_i} était orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot, \rangle_G$ dans $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions centrales. Il suffit donc de montrer que cette famille constitue en fait une base orthonormale de $\mathcal{C}(G)$. Pour ceci, on va simplement montrer que si $\alpha \in \mathcal{C}(G)$ est une fonction centrale orthogonale à tous les χ_{W_i}, elle est nulle. Soit une telle α. Pour (V, ρ) une représentation (quelconque) de G, considérons $\alpha'(g) = \alpha(g^{-1})$ et

$$\varphi_{V,\alpha} := \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho(g).$$

Elle est G-équivariante : en effet, pour tout $h \in G$, $h \cdot \rho(g) = \rho(hgh^{-1})$ pour l'action habituelle de G sur $\mathrm{Hom}(V, V)$, donc

$$h \cdot \varphi_{V,\alpha} = \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho(hgh^{-1}) = \sum_{g' \in G} \overline{\alpha(h^{-1}g'h)} \rho(g') = \sum_{g' \in G} \overline{\alpha(g')} \rho(g') = \varphi_{V,\alpha}.$$

Maintenant, lorsque V est irréductible, à cause du lemme de Schur, $\varphi_{V,\alpha}$ est forcément une homothétie, et son rapport d'homothétie est sa trace divisée par la dimension de V. On a donc dans ce cas une homothétie de rapport

$$\frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \chi_V(g) = 0,$$

par hypothèse sur α, comme V est isomorphe à un des W_i ! Lorsque V est la représentation régulière, $\varphi_{V,\alpha}$ se décompose sur chaque copie de W_i comme une homothétie indiquée ci-dessus, donc $\varphi_{R_G,\alpha} = 0$. En particulier, pour la base canonique $(e_g)_{g \in G}$ de R_G, on a, pour tout $h \in G$,

$$\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} e_{g \cdot h} = 0,$$

ce qui prouve que α est identiquement nulle sur G. □

Exercice 14. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique ne divisant pas $|G|$.

(a) Montrer que la caractéristique de k ne divise aucune dimension de représentation irréductible de G.

(b) Imiter la preuve ci-dessus pour redémontrer le théorème de Frobenius sous ces hypothèses.

Les conséquences du théorème de Frobenius vont nous donner les dernières relations utiles entre caractères irréductibles.

Proposition 9.
Pour tout $g \in G$, on note $c(g)$ la classe de conjugaison de g. Alors,

$$\sum_{\chi \in I} |\chi(g)|^2 = \frac{|G|}{|c(g)|}, \quad (R3)$$

où I est l'ensemble des caractères de représentations irréductibles de G. De plus, si $g, h \in G$ ne sont pas conjugués,

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(g)}\chi(h) = 0. \quad (R2)$$

Démonstration. Comme les caractères sont des fonctions centrales, pour toute classe de conjugaison C de G, chaque χ est constant sur C et on note $\chi(C)$ sa valeur sur ses éléments. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G, considérons la matrice

$$\left(\chi(C)\frac{|C|}{|G|}\right)_{\chi \in I, C \in \mathcal{C}}.$$

Le théorème de Frobenius nous dit que c'est une matrice carrée, et par orthonormalité des caractères irréductibles, on sait que ses lignes sont orthonormales : en effet, pour V, V' irréductibles non isomorphes,

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} |\chi_V(C)|^2 \frac{|C|}{|G|} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_V(g)|^2 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$$

et de même

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \overline{\chi_V(C)} \chi_{V'}(C) \frac{|C|}{|G|} = 0.$$

Une matrice complexe carrée dont les lignes sont orthonormales est automatiquement unitaire, et donc ses colonnes sont également orthonormales ! En écrivant l'orthonormalité des colonnes, on obtient directement les deux relations. □

2.3 Bilan des relations et tables de caractères

Soit G un groupe fini. On note X l'ensemble des caractères de représentations irréductibles et $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G.

Pour bien comprendre les représentations de G, on se donne pour objectif d'écrire sa *table des caractères.* C'est le tableau de toutes les valeurs de $\chi(C)$, où χ parcourt X et C parcourt $\mathcal{C}$. Pour la présenter, on met dans la première ligne des représentants des classes de conjugaison, et leur cardinal, et dans la première colonne les caractères de représentations irréductibles. Tout le travail précédent nous donne alors les relations suivantes :

— Il y a autant de lignes que de colonnes (R0)

— La somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles est $|G|$, autrement dit

$$\sum_{\chi \in X} \chi(1)^2 = |G| \quad (R1).$$

— Pour C, C' deux classes de conjugaison distinctes,

$$\sum_{\chi \in X} \overline{\chi(C)}\chi(C') = 0 \quad (R2),$$

autrement dit les colonnes de la table des caractères sont orthogonales.

— Pour toute classe de conjugaison C,

$$\sum_{\chi \in X} |\chi(C)|^2 = \frac{|G|}{|C|} \quad (R3), (R5),$$

autrement dit on connaît chaque norme de colonne de la table (ce n'est pas forcément 1).

— Pour deux caractères χ, χ' distincts,

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} |C|\overline{\chi(C)}\chi'(C) = 0, \quad (R4)$$

autrement dit les lignes de la table des caractères sont orthogonales *avec pondération suivant les classes*.

— Pour un caractère χ de X,

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} |C||\chi(C)|^2 = |G| \quad (R6),$$

donc on connaît la norme de chaque ligne.

Exercice 15. Ecrire les tables de caractères des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 16. Retrouver les tables de caractères de ces quelques petits groupes de permutation.

$\mathfrak{S}_3$	1 1	3 (1 2)	2 (1 2 3)
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_{std}	2	0	-1

$\mathfrak{A}_4$	1 1	4 (1 2 3)	4 (1 3 2)	3 (1 2)(3 4)
1	1	1	1	1
χ	1	j	j^2	1
χ^2	1	j^2	j	1
χ_3	3	0	0	-1

$\mathfrak{S}_4$	1 1	6 (1 2)	8 (1 2 3)	3 (1 2)(3 4)	6 (1 2 3 4)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	-1	2	0
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{std}}\cdot\varepsilon$	3	-1	0	-1	1