EXPONENTIELLE DE MATRICES

Dans ce mini-cours (qui n'est pas un plan de leçon), je donne les propriétés importantes de l'exponentielle de matrices et ses applications, en particulier au groupe linéaire.

La structure de ce cours est faite pour regrouper par thèmes les applications des différentes propriétés de l'exponentielle, bien que la plupart de celles-ci soient prouvables dès le début.

Le corps de base sera toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et propriétés de base

L'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ est munie (pour les définitions) d'une norme d'algèbre $\| \cdot \|$, c'est-à-dire une norme telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}),\ \|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|.$$

L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$ est complet pour cette norme (car de dimension finie). On identifiera $M_n(\mathbb{R})$ à la variété $\mathbb{R}^{n^2}$ pour le point de vue de la géométrie différentielle.

Définition (Exponentielle)**.**
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, définissons la série en A

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Elle converge normalement sur tout compact, et définit donc une fonction continue sur $M_n(\mathbb{K})$, appelée « exponentielle de matrices ».

Démonstration. Comme on a choisi une norme d'algèbre, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

qui est le terme général de la série convergente $\exp(\|A\|)$. On a donc bien la convergence normale sur tout compact de $M_n(\mathbb{K})$ et le reste en découle (en particulier, $\|\exp A\| \leq \exp(\|A\|)$). □

Voici quelques propriétés de base de l'exponentielle pour se faire une première idée.

Proposition 1.
(a) *Pour toute matrice* $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp({}^tA) = {}^t\exp A$.
(b) *Pour toute matrice* $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp A = P_A(A)$ *pour un certain polynôme* $P_A \in \mathbb{K}[X]$ *(qui dépend de A !).*
(c) *Si* $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *est diagonale, alors* $e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$ *aussi.*
(d) *Si* N *est nilpotente, alors* $e^N = \sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!}$.

Démonstration. Notons, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $P_M(A) = \sum_{k=0}^{M} A^k/k!$. Par définition de la série, on a toujours

$$\exp A = \lim_{M \to +\infty} P_M(A),$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P({}^tA) = {}^tP(A)$ d'où le (a). Plus grossièrement, l'ensemble des polynômes en A est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$, en particulier fermé, ce qui prouve le (b).

Les formules (c) et (d) découlent des expressions explicites des $P_M(A)$ lorsque A est diagonale ou nilpotente (pour ce dernier cas, $A^k = 0$ si $k > n$ d'où le résultat). □

On s'attend bien sûr à généraliser des propriétés de l'exponentielle ordinaire à celle des matrices, ce qui n'est pas aussi immédiat qu'il y paraît. Par exemple, prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on calcule immédiatement (comme $A^2 = B^2 = 0$) que

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mais par ailleurs, $(A+B)^2 = I_2$ donc

$$\exp(A+B) = \sum_{k\geq 0} \frac{I_2}{2k!} + \sum_{k\geq 0} \frac{A+B}{(2k+1)!} = \cosh(1)I_2 + \sinh(1)(A+B) \neq \exp A \cdot \exp B.$$

Le vrai résultat est la propriété suivante.

Proposition 2.
Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

Remarque. On retrouve dans ce cas qu'en particulier $\exp A$ et $\exp B$ commutent, ce qui était prouvable avant car $\exp B$ est un polynôme en B qui commute avec A, donc commute avec tout polynôme de A donc avec $\exp A$.

Démonstration. Comme on a affaire à deux séries normalement convergentes, on peut réécrire par le théorème de Fubini

$$\exp A \cdot \exp B = \sum_{k,\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\ell!} A^k B^\ell = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k B^{m-k}}{k!(m-k)!} \right).$$

Or, par la formule du binôme de Newton, comme A et B commutent, le terme général en m à droite n'est autre que $(A+B)^m/m!$ et on conclut immédiatement. □

Voici deux premières applications fondamentales de ce résultat

Corollaire 3. *Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice $\exp A$ est inversible et*

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

En particulier, l'exponentielle est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formule avec A et $-A$. □

Corollaire 4. *Si on considère la fonction $g_A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie pour A fixé par $g_A(t) = \exp(tA)$, cette fonction est $\mathcal{C}_\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$g'_A(t) = Ag(t) = g(t)A.$$

Exercice 1.
(a) Montrer plus généralement que pour tout fonction dérivable $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t)$ et $A(t)$ commutent, on a

$$(\exp A(t))' = A'(t) \exp A(t).$$

(b) Montrer que cette égalité n'est pas vérifiée en général, par exemple $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Il s'agit, pour exploiter la formule précédente, de remarquer que tA et $t'A$ commutent pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$. On a donc, pour $h \in \mathbb{R}$ tendant vers 0,

$$g_A(t+h) = g_A(t)g_A(h) = g_A(t)(1 + hA + o(h^2))$$

car $g_A(h)$ est une série entière en A. On a donc

$$\frac{g_A(t+h) - g_A(t)}{h} = Ag_A(t) + o(h),$$

ce qui démontre que g_A est dérivable en t de dérivée $Ag_A(t)$ (ou $g_A(t)A$ car ils commutent). □

2 Réduction et exponentielle de matrices

La formule fondamentale nous donne également une piste pour calculer plus facilement l'exponentielle.

Proposition 5.
(a) *Pour toutes matrices* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *et* $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}\exp(A)Q.$$

(b) *Supposons que* D *est une matrice diagonalisable de valeurs propres* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. *Alors, si* P *est un polynôme tel que pour tout* $i \in \{1, \cdots, n\}$, $P(\lambda_i) = \exp(\lambda_i)$ *(par exemple un polynôme d'interpolation de Lagrange), on a* $\exp D = P(D)$. *En particulier,* $\exp D$ *est diagonalisable.*

(c) *Si* $A = D + N$ *est la décomposition de Dunford de* A, *la décomposition de Dunford de* $\exp A$ *est*

$$\exp A = \exp D + \exp D \cdot (\exp N - I)(= \exp D \cdot \exp N)$$

(d) *Pour toute matrice* $A \in M_n(\mathbb{K})$, *on a*

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A).$$

Remarque. L'intérêt du (b) est qu'on peut calculer l'exponentielle dès qu'on connaît les valeurs propres de D, sans recourir à la diagonalisation de D elle-même.

Démonstration. (a) On réutilise les polynômes $P_M(A)$ plus haut. Alors,

$$\begin{aligned}
\exp(Q^{-1}AQ) &= \lim_{M\to+\infty} P_M(Q^{-1}AQ) \\
&= \lim_{M\to+\infty} Q^{-1}P_M(A)Q \\
&= Q^{-1}(\lim_{M\to+\infty} P_M(A))Q \\
&= Q^{-1}\exp(A)Q
\end{aligned}$$

par continuité de la conjugaison par Q dans $M_n(\mathbb{K})$.

(b) Reprenons les notations de l'énoncé. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$D = Q^{-1}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)Q.$$

Alors, d'après le (a),

$$\exp D = Q^{-1}\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})Q,$$

mais d'un autre côté, par construction de P,

$$\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) = P(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)).$$

On fait la substitution, et utilise encore la conjugaison par Q, pour obtenir

$$\exp D = P(D).$$

(c) Comme D et N commutent, $\exp D$ et $\exp N$ commutent également comme remarqué précédemment, et $\exp A = \exp D \exp N$. Ensuite, $\exp D$ est diagonalisable comme on vient de le montrer, et $\exp N - I$ est nilpotente car une somme de matrices nilpotentes qui commutent, donc $\exp D(\exp N - 1)$ est bien nilpotente encore une fois car les deux facteurs commutent. On a donc bien la décomposition de Dunford de $\exp A$, par unicité.

(d) Si T est une matrice triangulaire supérieure, ses itérées le sont également, et on voit directement que les coefficients diagonaux de $\exp T$ sont donc l'image par l'exponentielle de ceux de T. Ceci entraîne la formule pour les matrices triangulaires supérieures, et on la déduit dans le cas général par trigonalisation sur $\mathbb{C}$ et par le (a) (ou alternativement Dunford). □

Ces résultats de réduction permettent de connaître un peu mieux le comportement de l'exponentielle, notamment son injectivité.

Proposition 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisable sur $\mathbb{K}$ (automatique si $K = \mathbb{C}$). Alors :

(a) A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\exp A$ l'est.

(b) $\exp A = I$ si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et le spectre de A est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

(c) Si A, B sont réelles et diagonalisables sur $\mathbb{R}$, alors $\exp A = \exp B$ si et seulement si $A = B$.

Démonstration.

(a) L'implication directe est le (b) de la proposition précédente. Réciproquement, supposons A trigonalisable et $\exp A$ diagonalisable. On a la décomposition de Dunford $A = D + N$ dans $M_n(\mathbb{K})$, et il faut donc montrer que $N = 0$. Par le (c) précédemment, et l'unicité de la décomposition de Dunford de $\exp A$, on sait que

$$\exp D \cdot (\exp N - I) = 0,$$

donc $\exp N = I$ par inversibilité des exponentielles. Or,

$$\exp N - I = N \cdot \left(I + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{(k+1)!} \right) = N \cdot (I - N')$$

où N' est encore nilpotente en tant que somme de matrices nilpotentes qui commutent. Cela impose que $I + N'$ est inversible : en effet, on a

$$(I - N')(\sum_{k=0}^{n} (N')^k) = \sum_{k=0}^{n} (N')^k - \sum_{k=1}^{n+1} (N')^k = I - (N')^{n+1} = I$$

par hypothèse. Comme $\exp N = I$, on a donc nécessairement $N = 0$ ce qui prouve que A était bien diagonalisable.

(b) Par le (a), $\exp A = I$ si et seulement si A est diagonalisable et $\exp A = I$, et on utilise l'expression pour l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, sachant que le noyau de l'exponentiele habituelle est $2i\pi\mathbb{Z}$.

(c) Un sens est évident, supposons réciproquement que $\exp A = \exp B$. Par le (a), on en déduit que A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Alors, A est un polynôme en $\exp A$ et de même pour B. En effet, l'exponentielle étant injective sur $\mathbb{R}$, on peut trouver un polynôme P_A qui envoie e^λ sur λ pour toute valeur propre de A. On a alors $A = P_A(\exp A)$ par des arguments similaires à la Proposition 5. Maintenant, l'égalité $\exp A = \exp B$ impose que A et B soient tous les deux dans l'algèbre engendrée par cette matrice, en particulier elles commutent et $A - B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\exp(A - B) = \exp(A) \exp(B)^{-1} = I.$$

Comme $A - B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, son exponentielle également, et ses valeurs propres sont les images par l'exponentielle de celles de $A - B$, mais l'identité a pour seule valeur propre 1. Les valeurs propres de $A - B$ sont donc toutes 0, ce qui impose $A = B$. □

Exercice 2.

Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. En déduire des matrices réelles dont l'exponentielle est l'identité.

Exercice 3.

(a) Pour toute matrice A telle que $\|A - I\| < 1$, on définit le logarithme de A par

$$\log(A) = \sum_{k \geq 1} ((-1)^{k-1} \frac{(A - I)^k}{k}.$$

Montrer que cette série converge uniformément sur tout compact du domaine $\|A - I\| < 1$, en déduire qu'elle définit une fonction continue sur ce domaine.

(b) Montrer que l'exponentielle et le logarithme sont inverses l'un de l'autre lorsqu'ils sont tous les deux définis.

3 Image de l'exponentielle

Le but de cette section est de calculer l'image de l'exponentielle, totale ou restreinte à divers sous-espaces.

Proposition 7. *L'exponentielle est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Bien que ce soit contre-intuitif, on va en fait montrer un résultat plus fort : pour toute matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$B = \exp(P(A)).$$

Pour ceci, écrivons la décomposition de Dunford $B = D + N$ de B. Comme B est inversible, D également (cf. construction de la décomposition de Dunford) et on peut écrire $B = D(I + D^{-1}N)$. Comme D et N commutent, il suffit donc de montrer que D est une exponentielle d'un polynôme en D (car c'est un polynôme en B) et $I + D^{-1}N$ également. Pour la partie D, on réutilise les outils de la proposition précédente. Pour l'autre partie, on utilise le logarithme de $I + D^{-1}N$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(D^{-1}N)^k}{k}.$$

Par un calcul formel (fini), on montre directement que l'exponentielle de cette matrice n'est autre que $I + D^{-1}N$, et c'est gagné. □

Corollaire 8. *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Prenons une matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par le résultat précédent, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\exp A = B$, et on a alors le chemin $t \mapsto \exp(tA)$ qui en 0 vaut I et en 1 vaut B, continu, à valeurs dan s$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ce qui prouve la connexité par arcs. □

Corollaire 9. *Pour toute matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et toute puissance $p \in \mathbb{N}$, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = B$.*

Démonstration. Il suffit de prendre A_0 telle que $\exp A_0 = B$ et ensuite $A = \exp(A_0/p)$. □

Proposition 10. *L'image de l'exponentielle de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des M^2 où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Si $B = \exp A$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $B = \exp(A/2)^2$ par la formule, et donc c'est bien un carré de matrice réelle. Réciproquement, supposons que $B = M^2$ avec $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, par la preuve de la surjectivité ci-dessus, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$. On a finalement

$$B = \exp(P(M))^2 = \exp(P(M)) \exp(\overline{P}(M)) = \exp((P + \overline{P})(M))$$

et le polynôme $P + \overline{P}$ est réel, donc on a bien une exponentielle de matrice réelle. □

Exercice 4.

Montrer que l'exponentielle est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Prouver l'analogue dans le cas complexe