Feuille d'exercices
Séries formelles

Comme dans le cours, A est un anneau commutatif unitaire intègre, et K un corps commutatif.

Exercice 1. [Distance sur $A[[X]]$]
Pour toutes séries formelles $F, G \in A[[X]]$, on définit

$$d(F,G) = e^{-v(F-G)}.$$

(a) Montrer que d est une distance sur $A[[X]]$, qui plus est ultramétrique, c'est-à-dire que $d(F,H) \leq \max(d(F,G), d(G,H))$ pour tous $F,G,H \in A[[X]]$.
(b) Montrer que l'espace métrique $(A[[X]], d)$ est complet, et en donner une partie dense naturelle.
(c) Si $v(G) \geq 1$, réinterpréter $F \circ G$ d'un point de vue topologique.

Exercice 2. [Séries formelles classiques]
On définit, dans $K[[X]]$ avec K de caractéristique nulle, les séries formelles

$$\begin{aligned} \exp(X) &:= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n \\ \ln(1+X) &:= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n \\ (1+X)^\alpha &:= \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n \end{aligned}$$

où pour tout $\alpha \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(a) Montrer que $\exp(\ln(1+X)) = 1+X$ et $\ln(1+(\exp(X)-1)) = X$.
(b) Montrer que pour tous $a, b \in K$, $\exp(aX)\exp(bX) = \exp((a+b)X)$.
(c) Montrer que pour tout $\alpha \in K$, $(1+X)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+X))$.
(d) En déduire que pour tous $\alpha, \beta \in K$, $(1+X)^\alpha (1+X)^\beta = (1+X)^{\alpha+\beta}$.

Exercice 3. [Automorphismes de $K[[X]]$]
Pour tout $G \in K[[X]]$ non nul tel que $v(G) \geq 1$, on note

$$\varphi_G : F \mapsto F \circ G.$$

(a) Montrer que φ_G est un endomorphisme d'algèbres injectif de $K[[X]]$.
(b) Montrer que φ_G est surjectif si et seulement si $v(G) = 1$.
(c) Montrer qu'on obtient ainsi tous les automorphismes d'algèbres de $K[[X]]$.
(d) Avec la notion de distance de l'exercice 1 et la topologie associée, que dire de φ_G et de ses propriétés ?

Exercice 4. [Séries génératrices et applications]

(a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en utilisant les formules de De Moivre, prouver que

$$\sum_{n \geq 0} \cos(n\theta) X^n = \frac{1 - \cos(\theta) X}{1 - 2\cos(\theta) X + X^2}.$$

(b) Par développement du dénominateur de la fraction rationnelle en série formelle, en déduire les expressions des polynômes de Tchebychev de première espèce.

(c) Par la même méthode, calculer les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

(d) On note D_n le nombre de permutations sans points fixes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!.$$

(e) En considérant la série génératrice $\sum_{n \geq 0} D_n / n! X^n$, en déduire l'expression exacte

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(f) Calculer, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $S(n, k)$ le nombre de k-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut n.

Exercice 5. [Sommes de Newton]

On fixe ici $A = \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$S_k = X_1^k + \cdots + X_n^k \in A$$

et $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires, également dans A (pour $m > n$, on adoptera la convention $\Sigma_m = 0$).

(a) Exprimer $P(T) = \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i T) \in A[T]$ en fonction de $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$.

(b) Démontrer que dans $A[[T]]$:

$$-\frac{TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i T}{1 - X_i T} = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k T^k$$

(c) En déduire, pour tout $k \geq 1$, l'identité :

$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} S_1 = (-1)^{k-1} k \Sigma_k$$

(d) Démontrer que $S_k \in \mathbb{Z}[\Sigma_1, \cdots \Sigma_n]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, faire le calcul explicite pour S_1, S_2, S_3.

(e) Réciproquement, montrer que $\Sigma_k \in \mathbb{Q}[S_1, \cdots, S_n]$ pour tout k, et faire le calcul explicite pour Σ_1, Σ_2 et Σ_3.