ÉNS Lyon
Agrégation

Algèbre
2016-2017

Feuille d'exercices
Arithmétique des anneaux

Exercice 1. [Double quotient d'un anneau]

Soit A un anneau et I, J deux idéaux de A, on note $\pi_I : A \to A/I$ et $\pi_J : A \to A/J$ les projections.

Donner un isomorphisme d'anneaux entre $(A/I)/\pi_I(J)$ et $A/(I+J)$, en déduire un isomorphisme $(A/I)/\pi_I(J) \cong (A/J)/\pi_J(I)$.

En déduire pour un entier quadratique α (de polynôme minimal P) qu'un nombre premier p est premier dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ si et seulement P est irréductible modulo p.

Exercice 2. [Contre-exemple des éléments associés]

Soit K un corps, on pose $A = K[X,Y]/(XY^2)$.

(a) Montrer que A n'est pas intègre.

(b) Montrer que $\overline{X}$ et $\overline{X+XY}$ engendrent le même idéal.

(c) Donner une forme normale des éléments de A comme polynômes de $K[X,Y]$.

(d) En déduire qu'il n'existe pas de $P \in K[X,Y]$ tel que $\overline{P} \in A^*$ et $\overline{PX} = \overline{X+XY}$.

Exercice 3. [Théorème de Winckler]

Soit $A = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

(a) Pour tout $x \in [0,1]$, montrer que l'ensemble $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ est un idéal maximal de A et décrire A/I_x.

(b) Montrer que I_x n'est pas principal.

(c) Si $f \notin I_x$, montrer qu'il existe d'autres $y \in [0,1]$ tels que $f \notin I_y$.

(d) En déduire que les idéaux maximaux de A sont tous de la forme I_x.

(e) Que peut-on dire pour un anneau de la forme $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ avec X un ensemble quelconque ?

Exercice 4.

(a) Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

(b) Montrer que si A admet un stathme euclidien pour lequel la division euclidienne est unique, il est isomorphe à $K[X]$ pour un certain corps K.

(c) Montrer que pour un corps K, l'anneau des séries formelles $K[[X]]$ est euclidien.

Exercice 5. [Anneaux d'entiers quadratiques]

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré. On note $\mathcal{O}_d$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

(a) Montrer que $\mathcal{O}_d$ est égal à $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ si $d \equiv 1 \mod 4$ ou $d = 2$ et égal à $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{d})/2]$ si $d \equiv 3 \mod 4$.

(b) On note $N : z \mapsto |z|^2$. Montrer que N est à valeurs entières sur $\mathcal{O}_d$ et en déduire les unités de $\mathcal{O}_d$.

(c) Montrer que $\mathcal{O}_d$ est euclidien pour la norme N si et seulement si $d = 1, 2, 3, 7$ ou 11.

(d) Dans le cas de $\mathbb{Z}[i]$, chercher ses irréductibles et en déduire les nombres premiers s'écrivant comme somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 6. [Critère d'Eisenstein]

(a) Soit $n \geq 2$ et K un corps de caractéristique différente de 2. Montrer par récurrence que

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1$$

est irréductible dans $K[X_1, \cdots, X_n]$. Que se passe-t'il en caractéristique 2 ?

(b) Soit $n \geq 2$ et K un corps de caractéristique première à n. Montrer que $X^n + Y^n - 1$ est irréductible sur $K[X,Y]$.

Exercice 7. [Lemme des noyaux] Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u.

(a) Montrer que si $P = QR$ avec $Q, R \in K[X]$ premiers entre eux, alors

$$E = \operatorname{Ker} Q \oplus \operatorname{Ker} R$$

et que les projections selon cette décomposition sont des polynômes en u.

(b) Si K est algébriquement clos, en déduire la décomposition de Dunford, c'est-à-dire que tout endomorphisme de E s'écrit de manière unique comme

$$u = d + n$$

avec d diagonalisable et n nilpotent (et ils sont tous les deux des polynômes en u).

Exercice 8. [Anneaux non factoriels]

(a) Montrer que pour un corps K quelconque, $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ n'est pas factoriel malgré l'existence d'une décomposition en irréductibles. Que peut-on même remarquer sur cette décomposition en irréductibles ?

Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions entières sur $\mathbb{C}$.

(b) Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est intègre, et trouver ses inversibles.

(c) Montrer que les irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ sont à inversible près les fonctions affines $z \mapsto z - z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

(d) En déduire que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est pas factoriel ni noethérien.

Exercice 9. [Théorème des diviseurs élémentaires]

Soit A un anneau principal.

Pour $n \geq 2$ et $1 \leq i < j \leq n$, une transvection généralisée est une matrice de $M_n(A)$ égale à l'identité à part le bloc 2×2 d'indices (i, j), sur lequel c'est une matrice de $\mathrm{SL}_2(A)$.

Soit M une matrice de $M_{m,n}(A)$.

(a) Pour $k \leq \min(m, n)$, on note $D_k(M)$ le pgcd des mineurs de taille k de M. Montrer que $D_k(M) = D_k(M')$ si M et M' sont équivalentes dans A.

En déduire que les diviseurs élémentaires, s'ils existent, sont bien définis à inversibles près.

(b) Montrer qu'il suffit de prouver que toute matrice M est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} D_1(M) & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

avec M' de taille $m-1, n-1$ et dont tous les coefficients sont divisibles par $D_1(M)$.

(c) Montrer qu'en multipliant par des matrices de transvection généralisées à droite et à gauche, on peut obtenir que m_{11} divise tous les éléments de la première ligne et la première colonne de M.

(d) Si $(m_{11}) = (D_1(M))$, conclure.

(e) Si $(m_{11}) \neq (D_1(M))$, montrer qu'il existe une matrice $M^{(2)}$ équivalente à M telle que $m_{11}^{(2)}$ divise strictement m_{11}. Expliquer pourquoi le procédé doit s'arrêter et conclure.

Exercice 10. [Applications des diviseurs élémentaires]

(a) Trouver les diviseurs élémentaires de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}).$$

(b) Trouver la structure canonique des groupes abéliens donnés par générateurs et relations suivants :

G_1 engendré par x, y et z tels que $15x = 0$, $x + y + z = 0$ et $3x + 8y = 0$.

G_2 engendré par x, y et z tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - 3z & = & 0 \\ 3x - 2y - 3z & = & 0 \\ 7x + 4y + 10z & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 11. [Invariants de similitude]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

(a) En considérant E comme un $K[X]$-module via $P \cdot x = P(u)(x)$, montrer qu'il existe des polynômes unitaires $P_1 | \cdots | P_r$ tels qu'en tant que $K[X]$-module,

$$E \cong K[X]/(P_1) \times \cdots \times K[X]/(P_r).$$

(b) En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

où pour un polynôme P, C_P est sa matrice compagnon.

(c) Montrer que P_r est le polynôme minimal de u, $P_1 \cdots P_r$ son polynôme caractéristique, et que $P_1, \cdots, P_r$ caractérisent les classes de similitude de $M_n(K)$. En déduire que si deux matrices de $M_n(K)$ sont semblables dans une extension de K, elles le sont dans $M_n(K)$.

(d) Montrer qu'aux facteurs constants près, $P_1, \cdots, P_r$ est la suite des diviseurs élémentaires de la matrice $XI_n - M \in M_n(K[X])$. En déduire un algorithme pour calculer les invariants de similitude d'un endomorphisme.

Exercice 12. [Théorème de Kurschak]

En utilisant la valuation 2-adique sur $\mathbb{Z}$, montrer que pour tous $1 \leq m \leq n$, la somme

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$$

ne peut être entière sauf si $m = n = 1$.