Feuille d'exercices
Séries formelles

Comme dans le cours, A est un anneau commutatif unitaire intègre, et K un corps commutatif.

Exercice 1. [Distance sur $A[[X]]$]

Pour toutes séries formelles $F, G \in A[[X]]$, on définit

$$d(F,G) = e^{-v(F-G)}.$$

(a) Montrer que d est une distance sur $A[[X]]$, qui plus est ultramétrique, c'est-à-dire que $d(F,H) \leq \max(d(F,G), d(G,H))$ pour tous $F,G,H \in A[[X]]$.

(b) Montrer que l'espace métrique $(A[[X]], d)$ est complet.

(c) Si $v(G) \geq 1$, réinterpréter $F \circ G$ d'un point de vue topologique.

Exercice 2. [Séries formelles classiques]

On définit, dans $K[[X]]$ avec K de caractéristique nulle, les séries formelles

$$\begin{aligned}
\exp(X) &:= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n \\
\ln(1+X) &:= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n \\
(1+X)^\alpha &:= \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n
\end{aligned}$$

où pour tout $\alpha \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(a) Montrer que $\exp(\ln(1+X)) = 1+X$ et $\ln(1+(\exp(X)-1)) = X$.

(b) Montrer que pour tous $a, b \in K$, $\exp(aX)\exp(bX) = \exp((a+b)X)$.

(c) Montrer que pour tout $\alpha \in K$, $(1+X)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+X))$.

(d) En déduire que pour tous $\alpha, \beta \in K$, $(1+X)^\alpha(1+X)^\beta = (1+X)^{\alpha+\beta}$.

(e) Montrer dans $K[[X]][[Y]]$ que $\ln((1+X)(1+Y)) = \ln(1+X) + \ln(1+Y)$.

Exercice 3. [Automorphismes de $K[[X]]$]

Pour tout $G \in K[[X]]$ non nul tel que $v(G) \geq 1$, on note

$$\varphi_G : F \mapsto F \circ G.$$

(a) Montrer que φ_G est un endomorphisme d'algèbres injectif de $K[[X]]$.

(b) Montrer que φ_G est surjectif si et seulement si $v(G) = 1$.

(c) Montrer qu'on obtient ainsi tous les automorphismes d'algèbres de $K[[X]]$.

Exercice 4. [Séries génératrices et applications]

(a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en utilisant les formules de De Moivre, prouver que

$$\sum_{n \geq 0} \cos(n\theta) X^n = \frac{1 - \cos(\theta)X}{1 - 2\cos(\theta)X + X^2}.$$

(b) Par développement de cette fraction rationnelle en série formelle, en déduire les expressions des polynômes de Tchebychev de première espèce.

(c) On note D_n le nombre de permutations sans points fixes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!.$$

(d) En considérant la série génératrice $\sum_{n\geq 0} D_n/n! X^n$, en déduire une expression exacte que

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

(e) Calculer, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $S(n,k)$ le nombre de k-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut n.

Exercice 5. [Sommes de Newton]

On fixe ici $A = \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$S_k = X_1^k + \cdots + X_n^k \in A$$

et $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires, également dans A (pour $m > n$, on adoptera la convention $\Sigma_m = 0$).

(a) Exprimer $P(T) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i T) \in A[T]$ en fonction de $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$.

(b) Démontrer que dans $A[[T]]$:

$$-\frac{TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i T}{1 - X_i T} = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k T^k$$

(c) En déduire, pour tout $k \geq 1$, l'identité :

$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\Sigma_{k-1} S_1 = (-1)^{k-1} k \Sigma_k$$

(d) Démontrer que $S_k \in \mathbb{Z}[\Sigma_1, \cdots \Sigma_n]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, faire le calcul explicite pour S_1, S_2, S_3.

(e) Réciproquement, montrer que $\Sigma_k \in \mathbb{Q}[S_1, \cdots, S_n]$ pour tout k, et faire le calcul explicite pour Σ_1, Σ_2 et Σ_3.