ÉNS Lyon
Agrégation

Algèbre
2015-2016

Formes quadratiques, groupe orthogonal et théorème spectral

Dans les quatre premiers exercices, q est une forme quadratique sur le K-espace vectoriel E.

Exercice 1. [Cône isotrope] On note $C(q)$, appelé cône isotrope, l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

(a) Montrer que $C(q)$ est stable par multiplication scalaire et que $\operatorname{Ker} q \subset C(q)$.

(b) Si $C(q) \neq \operatorname{Ker} q$, montrer que q est surjective dans K. Donner ensuite un contre-exemple.

(c) Montrer que si q est non dégénérée et F ne contient pas de vecteur isotrope non nul, alors $F \oplus F^{\perp} = E$.

(d) Montrer que si $C(q) \neq \{0\}$ et q est non dégénérée, alors $\operatorname{Vect}(C(q)) = E$.

Exercice 2. Soient deux vecteurs anisotropes distincts x, y de E tels que $q(x) = q(y)$.

(a) Montrer qu'il existe au plus une réflexion de E envoyant x sur y.

(b) Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions envoyant x sur y (indice : montrer que $x - y$ ou $x + y$ est anisotrope).

(c) En déduire les orbites de $E \backslash C(q)$ sous l'action de $O(q)$.

Exercice 3. [Plans hyperboliques] On dit que E est un plan hyperbolique si $\dim E = 2$ et qu'il existe une base (e_1, e_2) de E (dite hyperbolique) dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que dans un plan hyperbolique, tout vecteur isotrope se complète en une base hyperbolique.

(b) Montrer que pour E de dimension 2, q est soit dégénérée, soit anisotrope, soit hyperbolique.

(c) Montrer que pour E de dimension au moins 2 et q non dégénérée, si $x \in E$ est isotrope, il est contenu dans un plan P tel que $q_{|P}$ est hyperbolique.

Exercice 4. [SETI et SETIM] Un sous-espace vectoriel F de E est dit totalement isotrope (SETI) si chacun de ses vecteurs est isotrope. Un tel espace maximal pour l'inclusion est dit SETIM. On note $\nu(q)$ la dimension maximale d'un SETI.

(a) Montrer que F est un SETI si et seulement si $F \subset F^{\perp}$.

(b) Montrer que si F est un SETI,

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker} B_q).$$

En déduire que $\nu(q) \leq \dim E - \operatorname{rg} q/2$.

(c) Soient F_1 et F_2 deux SETIM et $F = F_1 \cap F_2$. Soient des supplémentaires (quelconques G_1 et G_2) tels que $F \oplus G_1 = F_1$ et $F \oplus G_2 = F_2$. Montrer que $G_1 \cap G_2^{\perp} = G_2 \cap G_1^{\perp} = 0$, et en déduire que les SETIM ont tous même dimension.

(d) Donner cette dimension dans le cas $K = \mathbb{R}$ et q de signature (p, q).

Exercice 5. [Applications du théorème spectral, et décomposition polaire]

(a) Montrer que deux matrices symétriques réelles sont congruentes si elles sont semblables.

(b) Calculer l'ensemble des $A \in S_n(\mathbb{R})$ tels que pour tout $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.

(c) Pour deux matrices $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

(d) Décrire les orbites de l'action de $O_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $(O_1, O_2) \cdot M := O_1 M O_2^{-1}$.

(e) Pour $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à la norme euclidienne, montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.

Exercice 6. [Endomorphismes adjoints]

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et u un endomorphisme symétrique pour ϕ sur E.

(a) Quelle est la forme de la matrice de u dans une base de diagonalisation de ϕ ?

(b) Si F est un sous-espace stable de E pour u, montrer que $F^{\perp}$ l'est aussi.

(c)Réciproquement, pour un endomorphisme quelconque u de E stabilisant F et $F^{\perp}$, si ϕ n'a pas de vecteurs isotropes, montrer que u est symétrique si et seulement si $u_{|F}$ et $u_{|F^{\perp}}$ le sont.

(d) En déduire que les symétries orthogonales sont toujours symétriques. Qu'en est-il des projecteurs orthogonaux ?

Exercice 7. [Questions diverses]

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ (muni de la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $M_n(\mathbb{R})$) est connexe par arcs.

(b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, et que les retournements sont tous conjugués dans le groupe.

(c) Soit n et m deux entiers $\geqslant 1$ différents. Montrer que les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $O_m(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes. (*Indication :* on pourra dénombrer les classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.)

(d) Montrer que O_n (resp. U_n) est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).

(e) Montrer que l'application exponentielle induit une bijection de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 8. [Structure de $SO_n(\mathbb{R})$]

1. Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

   (a) Déterminer le centre de $O_n(\mathbb{R})$ et celui de $SO_n(\mathbb{R})$. On note $PSO_n(\mathbb{R})$ le quotient de $SO_n(\mathbb{R})$ par son centre.

   (b) Soit $N \lhd SO_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ non réduit à $\{\mathrm{id}\}$. Démontrer qu'il contient un élément u tel que $-1 \leqslant \operatorname{tr} u < 3$.

   (c) En considérant les commutateurs de u et d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $t_0 < 3$ tel que pour tout $t \in [t_0, 3]$, N contienne un élément de trace t.

   (d) En déduire que N contient un élément d'ordre (fini) pair, puis que N contient un retournement.

   (e) Conclure.

2. Simplicité de $PSO_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 5$.
   Dans la suite de l'exercice, $n \geqslant 5$.

   (a) Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^n$, on considère $G_F = \{u \in SO_n(\mathbb{R}) | u_{|F} = \mathrm{id}_F\}$. À quoi est isomorphe G_F ?

   (b) Soit $u \in SO_n(\mathbb{R})$ différent de $\pm\,\mathrm{id}$. Montrer qu'il existe un élément $v \in SO_n(\mathbb{R})$ tel que le commutateur $c = [u, v]$ soit différent de $\pm\,\mathrm{id}$ mais fixe un vecteur unitaire.

   (c) Démontrer qu'il existe $w \in SO_n(\mathbb{R})$ tel que le commutateur $[c, w]$ soit différent de $\pm\,\mathrm{id}$ mais fixe un sous-espace vectoriel de codimension $\leqslant 2$.

   (d) En déduire la liste des sous-groupes distingués de $SO_n(\mathbb{R})$ et la simplicité de $PSO_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Le groupe $PSO_4(\mathbb{R})$ n'est pas simple : il est isomorphe à $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$.