Agrégation ENS Lyon
2015/2016

Formes bilinéaires, formes quadratiques

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des formes linéaires sur E.

(a) Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ engendrent E^* ssi $\cap_{i=1}^n \ker \lambda_i = \{0\}$.

(b) Quel lien y a-t-il entre la dimension du sous-espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et celle de $\cap_{i=1}^n \ker \lambda_i$?

Exercice 2 Soit E, F deux k-espaces vectoriels et $u \in \mathrm{Hom}_k(E, F)$. On note $u^* \in \mathrm{Hom}_k(F^*, E^*)$ l'application linéaire duale de u.

(a) Montrer les équivalences

$$\begin{aligned} u \text{ injective } &\Leftrightarrow u^* \text{ surjective} \\ u \text{ surjective } &\Leftrightarrow u^* \text{ injective.} \end{aligned}$$

(b) Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On pose $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ avec $\lambda_i \in E^*$. Montrer que l'image de u^* est le sous-espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(c) En déduire $\dim \ker u + \dim \mathrm{im}\, u^* = \dim E$ puis $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$.

Exercice 3 Soit E un k-espace vectoriel et F un sous-espace de E.

(a) Montrer que le dual de E/F s'identifie à $\{\lambda \in E^*; \lambda|_F = 0\}$.

(b) Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $(E/F)^*$ est stable par $u^* \in \mathrm{End}(E^*)$.

Exercice 4 Soient E, F des espaces vectoriels de bases respectives $(e_i)_{1 \le i \le m}$ et $(f_j)_{1 \le j \le n}$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_k(E, F)$, de matrice M dans ces bases. Déterminer la matrice de u^* dans les bases duales $(f_j^*)_{1 \le j \le n}$ et $(e_i^*)_{1 \le i \le m}$.

Exercice 5 Soit λ une forme linéaire sur $M_n(k)$ telle que $\lambda(AB) = \lambda(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(k)$. Montrer que λ est proportionnelle à la trace.

Exercice 6 Soient E, F des k-espaces vectoriels. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in E^*$ et $\mu_1, \dots, \mu_r \in F^*$. Montrer que le rang de la forme bilinéaire $\phi : E \times F \to k$ définie par $\phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\mu_i(y)$ est $\le r$.

Exercice 7 Soit E un k-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique. On note $L_\phi : E \to E^*$ l'application linéaire associée.

(a) Soit F un supplémentaire de $\ker L_\phi$ dans E. Montrer que la restriction de ϕ à F est non dégénérée.

(b) Réciproquement, soit F un sous-espace de E tel que $\phi|_{F\times F}$ est non dégénérée. Montrer que F est inclus dans un supplémentaire de $\ker L_\phi$.

Exercice 8 Soit E un k-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m)$ de E telle que

$$\phi(e_i, e_j) = \phi(f_i, f_j) = 0 \qquad \phi(e_i, f_j) = \delta_{ij} \qquad (1 \leq i, j \leq m)$$

(en particulier, la dimension de E est paire).

Indication : procéder par récurrence sur la dimension de E.

Exercice 9 Soit E un k-espace vectoriel. Montrer que $q : E \to k$ est une forme quadratique si et seulement si $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ ($\lambda \in k$, $x \in E$) et $(x, y) \mapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Exercice 10 Soit E un k-espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}$ des formes quadratiques sur E est un k-espace vectoriel.
2. Quelle est la dimension de $\mathcal{Q}$?
3. On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies positives) est un convexe de $\mathcal{Q}$.

Exercice 11 Soit E un k-espace vectoriel. Soient $f, g \in E^*$. Déterminer une forme diagonale de la forme quadratique $q = fg$ et son rang.

Exercice 12 Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbf{R})$ et déterminer sa signature.

Exercice 13 Déterminer la signature de la forme quadratique $q(x) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$ sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 14

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbf{R}^n$ telle que $q(gx) = q(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathbf{R}^n$.
2. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.