Exercice 15. [Algorithme de Gauss]

Appliquer l'algorithme de Gauss aux formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{R}^4$.
3. La forme quadratique déterminant sur $M_2(\mathbb{R})$.

Pour chacune d'entre elles, en déduire la signature et le rang.

Exercice 16. [Algorithme de Gauss, conséquences théoriques]

Soit une forme quadratique q sur un K-espace vectoriel E écrite sous la forme

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i^2$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in E^*$ et linéairement indépendantes, et $a_1, \cdots, a_r \in K$ tous non nuls.

1. Exprimer le noyau de q.
2. Donner un moyen d'exhiber une base orthogonale de q.
3. Si $K = \mathbb{C}$, à quelle forme quadratique q est-elle isomorphe ?
4. Si $K = \mathbb{R}$ et $a_1, \cdots, a_r$ sont tous positifs, quel est l'ensemble des vecteurs isotropes de q ?
5. Si M est la matrice de q dans une certaine base de E, montrer qu'elle est congruente à une certaine matrice diagonale.

Exercice 17. [Théorème d'inertie de Sylvester]

Donner les signatures et rangs des formes quadratiques suivantes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, étudier les solutions de $q(x) = \lambda$, et en déduire la classification des coniques. Quand obtient-on une conique dégénérée ?