ENS Lyon — Algèbre
Préparation Agrégation — 2015-2016

Feuille d'exercices 2
Actions de groupes et représentations linéaires

Exercice 1. [p-groupes]

Soit G un p-groupe.

(a) Si G agit sur un ensemble fini X, montrer que $|X^G| \equiv |X| \mod p$.

(b) Montrer que le centre de G est non trivial. En déduire que si $|G| = p^2$, G est abélien. Est-ce également vrai si $|G| = p^3$?

(c) Montrer que G admet des sous-groupes distingués d'ordre d pour tout diviseur d de $|G|$. Donner un contre-exemple si G n'est pas un p-groupe.

Exercice 2. [Théorème de Cauchy]

Soit G un groupe fini de cardinal divisible par un certain nombre premier p. On considère l'ensemble

$$E = \{(g_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mid \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} g_i = 1\},$$

et l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E définie par

$$j \cdot (g_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = (g_{i+j})_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}.$$

Montrer que E est de cardinal $|G|^{p-1}$, et que les points fixes de E pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont les $(g, \cdots, g)$ avec $g \in G$ tel que $g^p = 1$.

En déduire que G admet un élément d'ordre exactement p.

Exercice 3. [Formule de Burnside et applications]

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note pour tout $g \in G$, $f(g)$ le nombre de points fixes de g dans X, et N le nombre d'orbites de l'action.

(a) Montrer la formule de Burnside :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

(b) Si l'action est transitive et $|X| \geq 2$, montrer qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe. En déduire qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

On suppose maintenant que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Chaque $g \in G$ non trivial a un axe de rotation unique qui intersecte la sphère unité en deux points, et on définit X l'ensemble de ces points, sur lequel G agit par restriction de l'action sur la sphère.

(c) Soit N le nombre d'orbites de l'action. Montrer que

$$N = \frac{|X|}{|G|} + 2 - \frac{2}{|G|}.$$

En déduire que $N = 2$ ou 3.

(d) Si $N = 2$, montrer que G est cyclique.

(e) Si $N = 3$ et qu'on choisit des représentants x_1, x_2, x_3 des orbites (classées par cardinal croissant), montrer que les cardinaux des stabilisateurs sont de la forme $(2, 2, n)$ avec n quelconque, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ ou $(2, 3, 5)$.

Exercice 4. Soit G un groupe abélien fini, on note $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(a) Montrer que $\widehat{G} \simeq G$. Est-ce toujours vrai lorsque G n'est pas abélien ?

(b) Montrer que $\widehat{\widehat{G}}$ est canoniquement isomorphe à G.

Exercice 5. Soit V une représentation fidèle de G de caractère χ et ϕ un caractère irréductible de G.

(a) Montrer que la seule classe de conjugaison C de G pour laquelle $\chi(C) = \dim V$ est $C = \{e\}$.

(b) Ecrire le produit scalaire $\langle \phi, \chi^n \rangle$ en fonction des classes de conjugaison de G. En déduire une expression de la série génératrice $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \phi, \chi^n \rangle T^n$.

(c) Montrer qu'il existe n tel que la représentation irréductible de caractère ϕ est une sous-représentation de $V^{\otimes n}$.

Exercice 6. [Algèbres de groupe]

La R-algèbre d'un groupe G sur un anneau commutatif R est le R-module libre de base $(e_g)_{g \in G}$ muni de la multiplication

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g e_g \right) \left(\sum_{g \in G} \mu_h e_h \right) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h e_{gh}.$$

(a) Montrer qu'une représentation k-linéaire de G est exactement un $k[G]$-module.

(b) Montrer que le centre de $R[G]$ est le R-module libre engendré par les $\sum_{g \in C} e_g$ avec C une classe de conjugaison de G.

(c) Prouver que pour toute classe de conjugaison C et toute représentation complexe irréductible V, l'application $\phi_C = \sum_{g \in C} g$ est une homothétie de rapport λ_C, où λ_C est un entier algébrique.

(d) En déduire que la dimension d'une représentation complexe V divise l'ordre de G si V est irréductible.

Exercice 7. [Représentations fidèles] Une représentation (V, ρ) de G est dite fidèle si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est injective.

(a) Exhiber une représentation fidèle de G.

(b) Montrer que pour le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$, la représentation standard est irréductible.

(c) Montrer que si G est simple, toute représentation non triviale est fidèle.

(d) Montrer que tout sous-groupe distingué de G est une intersection de noyaux de représentations irréductibles.

(e) En déduire que si toute représentation irréductible non triviale de G est fidèle, le groupe G est simple.

(f) En déduire que G est simple si et seulement si $\chi(g) \neq \chi(1)$ pour tout g non trivial et tout caractère irréductible χ non trivial de G.

Exercice 8. Montrer que si H est un sous-groupe commutatif de G, toute représentation irréductible de G est de cardinal au plus $(G : H)$.

Exercice 9. [Transformée de Fourier discrète] Soit G un groupe fini abélien, on note $\mathcal{F}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g).$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}(G)$ est une représentation de G, avec une G-structure préservée par le produit scalaire.

(b) On définit, pour tout $\phi \in \mathcal{F}(G)$, $\widehat{\phi}$ sur $\mathcal{F}(\widehat{G})$ par $\widehat{\phi}(\chi) = \langle \chi, \phi \rangle$.

Montrer que $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ est un isomorphisme de G-représentations pour une structure de représentation sur $\mathcal{F}(\widehat{G})$ à expliciter.

(c) On définit le produit de convolution de ϕ et ψ par la formule

$$\phi * \psi(g) = \sum_{\substack{h,k\in G \\ h+k=g}} \phi(h)\psi(k).$$

Montrer que $\widehat{\phi * \psi} = |G|\widehat{\phi}\widehat{\psi}$.

On suppose maintenant que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(d) Avec l'identification canonique entre $\widehat{G}$ et le groupe des racines n-ièmes de l'unité, donner explcitement la transformée de Fourier discrète d'une fonction ϕ.

(e) Calculer la transformée de Fourier discrète de ϕ pour ϕ constante, et $\phi(\overline{k}) = a^k$ pour $k \in [0, n-1]$

(f) Donner la transformée de Fourier discrète d'un signal translaté de ϕ en fonction de celle de ϕ.

Exercice 10. [Transformée de Fourier rapide] On suppose ici $G = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. On note $\zeta = e^{2i\pi/2^n}$ et χ_j le caractère de G défini par $\chi_j(k) = \zeta^k$.

On pose $H = 2\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, et pour tout caractère χ sur G, on note $\tilde{\chi}$ sa restriction à H.

(a) Soit $f \in \mathcal{F}(G)$, on note $f_0 = f_{|H}$ et f_1 la fonction définie sur H par $f_1(k) = f_0(k+1)$. Montrer que pour tout χ_j,

$$\widehat{f}(\chi_j) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f_0}(\widetilde{\chi_j}) + \zeta^{-j}\widehat{f_1}(\widetilde{\chi_j})\right).$$

(b) Si $j \geq 2^{n-1}$ et $k = j - 2^{n-1}$, montrer que

$$\widehat{f}(\chi_j) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f_0}(\widetilde{\chi_k}) - \zeta^{-k}\widehat{f_1}(\widetilde{\chi_k})\right).$$

(c) En déduire une méthode efficace pour calculer $\widehat{f}(\chi_j)$ pour tout j. Evaluer sa complexité.

Exercice 11. [Tables de caractères de petits groupes]

(a) Calculer la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.

(b) Soit H_8 le groupe des quaternions, constitué des matrices $\pm I_2, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Calculer ses classes de conjugaison et sa table de caractères.

(c) Soit D_{2n} le groupe diédral, c'est-à-dire le groupe des isométries du n-gone régulier. On choisit s une symétrie de D_{2n} et r la rotation d'angle $2\pi/n$, démontrer que r et s engendrent D_{2n}, et que $srs^{-1} = r^{-1}$.

(d) Donner les classes de conjugaison de D_{2n}, en distinguant les cas pair et impair.

(d) Calculer la table de caractères de D_{2n}, en distinguant les cas pair et impair. Que peut-on dire de celle de D_8 ?

Exercice 12. [Table des caractères de $\mathfrak{A}_5$]

(a) Calculer les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$. En déduire que celui-ci a 5 représentations irréductibles distinctes.

(b) Calculer les lignes de la table correspondant aux caractères triviaux et standard. Démontrer que les dimensions des représentations irréductibles restantes sont 3,3 et 5, dont on note les caractères χ_3, χ_3' et χ_5.

(c) Calculer le caractère de la représentation associée à l'action de $\mathfrak{A}_5$ sur les paires d'éléments de $[|1, 5|]$. En déduire les valeurs de χ_5.

(d) Utiliser l'orthogonalité des caractères pour compléter la table.

Exercice 13. [Dimensions des représentations irréductibles]

Cet exercice a pour but d'améliorer le résultat final de l'exercice 6. On considère G un groupe fini.

(a) Soit (V, ρ) une représentation irréductible complexe de G. Montrer que pour tout $c \in Z(G)$, $\rho(c)$ est une homothétie. On note son rapport λ_c.

(b) Pour tout $m \geq 1$, on note $\rho^{\otimes m}$ la représentation de G^m sur $V^{\otimes m}$ définie par

$$(g_1, \cdots, g_m) \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := (g_1 \cdot v_1) \otimes \cdots \otimes (g_m \cdots v_m).$$

Donner le caractère de cette représentation de G^m, et en déduire qu'elle est irréductible.

(c) Si $(c_1, \cdots, c_m) \in Z(G)^m$, montrer que $\rho^{\otimes m}(c_1, \cdots, c_m)$ est une homothétie de rapport $\lambda_{c_1} \cdots \lambda_{c_m}$. En déduire une représentation irréductible de G^m/H, où H est le sous-groupe de $Z(G)^m$ constitué des m-uplets de produit égal à 1.

(d) Déduire de la question précédente et de l'exercice 6 que $(\dim V)^m$ divise $|G|^m/|Z(G)|^{m-1}$ pour tout $m \geq 1$.

(e) En déduire que la dimension de V divise $[G : Z(G)]$.

Exercice 14. [Théorème de Burnside]

Soient p et q deux nombres premiers distincts, et G un groupe fini de cardinal $p^a q^b$ avec $a, b > 0$.

(a) On suppose que $Z(G)$ est trivial. Pour tout $g \in G$ non trivial, on note $c(g)$ le nombre de conjugués de G. Montrer qu'il existe $g \neq 1$ tel que $c(g)$ n'est pas divisible par q, et qu'alors $c(g)$ est une puissance de p.

(b) Montrer par l'absurde que pour $g \in G$ non conjugué à 1, il existe un caractère irréductible non trivial χ tel que p ne divise pas $\chi(1)$ et que $\chi(g) \neq 0$.

On suppose maintenant que $Z(G)$ est trivial, et on fixe $g \in G$ vérifiant les conditions du (a), χ vérifiant les conditions du (b), et (V, ρ) une représentation de caractère χ.

(c) En reprenant la preuve du (c) de l'Exercice 6, montrer que $c(g)\chi(g)/\dim V$ est un entier algébrique, puis que $\chi(g)/\dim V$ en est un.

(d) Sachant que $\chi(g)$ est une somme de racines de l'unité, en déduire que $\rho(g)$ est une homothétie.

(e) En utilisant le (d), exhiber un sous-groupe distingué de G différent de $\{1\}$ et G. En déduire qu'un groupe de cardinal $p^a q^b$ n'est jamais simple.

Exercice 15. [Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$]

Soit $n \geq 1$ un entier, on note $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$.

(a) Montrer que les automorphismes de $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ sont déterminés par leur image de ζ_n. En déduire que le groupe G des automorphismes de $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ et est donc de cardinal $\varphi(n)$.

(b) Montrer que l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_n)^G$ est de degré $\varphi(n)$, en déduire que $\mathbb{Q}(\zeta_n)^G = \mathbb{Q}$.

(c) Montrer que pour tout $g \in \mathfrak{S}_n$, g est conjugué à son inverse. En déduire que tous les caractères de représentation de $\mathfrak{S}_n$ sont à valeurs réelles. Est-ce le cas pour $\mathfrak{A}_n$?

(d) Montrer que pour tout $g \in \mathfrak{S}_n$, g est conjugué à g^k dès que k est premier à l'ordre de g. En déduire que pour tout caractère χ de $\mathfrak{S}_n$, on a $\chi(g) = \chi(g^k)$ avec les mêmes notations.

(e) Soit $g \in \mathfrak{S}_n$ d'ordre m. Montrer que $\chi(g)$ est une somme de racines m-ièmes de l'unité, donc un entier algébrique. Pour k premier à m et ϕ_k l'automorphisme de $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ défini par $\phi_k(\zeta_m) = \zeta_m^k$, montrer que

$$\phi_k(\chi(g)) = \chi(g^k).$$

En déduire que $\chi(g)$ est invariant par tout automorphisme de $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

(f) En conclure que les caractères de représentations de $\mathfrak{S}_n$ sont toujours à valeurs entières.