ÉNS Lyon — Algèbre
Agrégation — 2014-2015

Formes quadratiques et espaces euclidiens

Par défaut, E est un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. En cas d'hypothèses supplémentaires sur E, K ou q, elles seront précisées exercice par exercice.

Exercice 1. [Forme diagonale de quelques formes quadratiques]

(a) Pour $q = fg$ avec $fg \in E^*$, donner une forme diagonale de q et son rang.

(b) Pour $E = M_n(\mathbb{R})$ et $q : M \mapsto \operatorname{Tr} M^2$, donner la signature de q.

(c) Pour q définie par $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$ sur $\mathbb{R}^n$, trouver la signature de q.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 2. Soient deux vecteurs anisotropes distincts x, y de E tels que $q(x) = q(y)$.

(a) Montrer qu'il existe au plus une réflexion de E envoyant x sur y.

(b) Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions envoyant x sur y (indice : montrer que $x - y$ ou $x + y$ est anisotrope).

(c) En déduire les orbites de $E \backslash C(q)$ sous l'action de $O(q)$.

Exercice 3. [Plans hyperboliques] On dit que E est un plan hyperbolique, c'est-à-dire que $\dim E = 2$ et pour une certaine base (e_1, e_2) de E, e_1 et e_2 sont isotropes et $B_q(e_1, e_2) = 1$ (une telle base est dite hyperbolique).

(a) Montrer que dans un plan hyperbolique, tout vecteur isotrope est le premier vecteur d'une base hyperbolique.

(b) Si E est de dimension 2, montrer que c'est un plan hyperbolique si et seulement si q n'est pas dégénérée et admet un vecteur isotrope.

(c) En déduire que si E est de dimension 2, soit q est anisotrope, soit q est hyperbolique, soit q est de rang 1, soit $q = 0$.

(c) Montrer que pour E de dimension au moins 2 et q non dégénérée, si $x \in E$ est isotrope, il est contenu dans un plan P tel que $q_{|P}$ est hyperbolique.

Exercice 4. [SETI et SETIM] Un sous-espace vectoriel F de E est dit totalement isotrope (SETI) si chacun de ses vecteurs est isotrope. Un tel espace maximal pour l'inclusion est dit SETIM. On note $\nu(q)$ la dimension maximale d'un SETI.

(a) Montrer que F est un SETI si et seulement si $F \subset F^\perp$.

(b) Montrer que si F est un SETI,

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker} B_q).$$

En déduire que $\nu(q) \leq \dim E - \operatorname{rg} q/2$.

(c) Soient F_1 et F_2 deux SETIM et $F = F_1 \cap F_2$. Soient des supplémentaires (quelconques G_1 et G_2) tels que $F \oplus G_1 = F_1$ et $F \oplus G_2 = F_2$. Montrer que $G_1 \cap G_2^\perp = G_2 \cap G_1^\perp = 0$, et en déduire que les SETIM ont tous même dimension.

(d) Donner cette dimension dans le cas $K = \mathbb{R}$ et q de signature (p, q).

Exercice 5. [Applications du théorème spectral, et décomposition polaire]

(a) Montrer que deux matrices symétriques réelles sont congruentes si elles sont semblables.

(b) Calculer l'ensemble des $A \in S_n(\mathbb{R})$ tels que pour tout $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.

(c) Pour deux matrices $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

(d) Classifier les orbites de l'action de $O_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $(O_1, O_2) \cdot M := O_1 M O_2^{-1}$.

(e) Pour $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à la norme euclidienne, montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.