Actions de groupes et représentations linéaires des groupes finis

Exercice 1. [p-groupes] Soit G un p-groupe.

(a) Montrer que le centre de G est non trivial.

(b) Montrer que G admet des sous-groupes distingués d'ordre d pour tout diviseur d de $|G|$. Donner un contre-exemple si G n'est pas un p-groupe.

(c) Montrer que si $|G| = p^2$, G est abélien. Est-ce également vrai pour $|G| = p^3$?

Exercice 2. [Formule de Burnside et applications]

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note pour tout $g \in G$, $f(g)$ le nombre de points fixes de g dans X, et N le nombre d'orbites de l'action.

(a) Montrer la formule de Burnside :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

(b) Si l'action est transitive et $|X| \geq 2$, montrer qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe. En déduire qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

On suppose maintenant que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Chaque $g \in G$ non trivial a un axe de rotation unique qui intersecte la sphère unité en deux points, et on définit X l'ensemble de ces points, sur lequel G agit par restriction de l'action sur la sphère.

(c) Soit N le nombre d'orbites de l'action. Montrer que

$$N = \frac{|X|}{|G|} + 2 - \frac{2}{|G|}.$$

En déduire que $N = 2$ ou 3.

(d) Si $N = 2$, montrer que G est cyclique.

(e) Si $N = 3$ et qu'on choisit des représentants x_1, x_2, x_3 des orbites (classées par cardinal croissant), montrer que les cardinaux des stabilisateurs sont de la forme $(2, 2, n)$ avec n quelconque, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ ou $(2, 3, 5)$.

Exercice 3. Soit G un groupe abélien fini, on note $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(a) Montrer que $\widehat{G} \simeq G$. Est-ce toujours vrai lorsque G n'est pas abélien ?

(b) Montrer que $\widehat{\widehat{G}}$ est canoniquement isomorphe à G.

Exercice 4. [Transformée de Fourier discrète] Soit G un groupe fini abélien, on note $\mathcal{F}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g).$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}(G)$ est une représentation de G, avec une G-structure préservée par le produit scalaire.

(b) On définit, pour tout $\phi \in \mathcal{F}(G)$, $\widehat{\phi}$ sur $\mathcal{F}(\widehat{G})$ par $\widehat{\phi}(\chi) = \langle \chi, \phi \rangle$.

Montrer que $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ est un isomorphisme de G-représentations pour une structure de représentation sur $\mathcal{F}(\widehat{G})$ à expliciter.

(c) On définit le produit de convolution de ϕ et ψ par la formule

$$\phi * \psi(g) = \sum_{\substack{h,k \in G \\ h+k=g}} \phi(h)\psi(k).$$

Montrer que $\widehat{\phi * \psi} = |G|\widehat{\phi}\widehat{\psi}$.

On suppose maintenant que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(d) Avec l'identification canonique entre $\widehat{G}$ et le groupe des racines n-ièmes de l'unité, donner explcitement la transformée de Fourier discrète d'une fonction ϕ.

(e) Calculer la transformée de Fourier discrète de ϕ pour ϕ constante, et $\phi(\overline{k}) = a^k$ pour $k \in [0, n-1]$

(f) Donner la transformée de Fourier discrète d'un signal translaté de ϕ en fonction de celle de ϕ.

Exercice 5. [Transformée de Fourier rapide] On suppose ici $G = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. On note $\zeta = e^{2i\pi/2^n}$ et χ_j le caractère de G défini par $\chi_j(k) = \zeta^k$.

On pose $H = 2\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, et pour tout caractère χ sur G, on note $\tilde{\chi}$ sa restriction à H.

(a) Soit $f \in \mathcal{F}(G)$, on note $f_0 = f_{|H}$ et f_1 la fonction définie sur H par $f_1(k) = f_0(k+1)$. Montrer que pour tout χ_j,

$$\widehat{f}(\chi_j) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f_0}(\widetilde{\chi_j}) + \zeta^{-j}\widehat{f_1}(\widetilde{\chi_j})\right).$$

(b) Si $j \geq 2^{n-1}$ et $k = j - 2^{n-1}$, montrer que

$$\widehat{f}(\chi_j) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f_0}(\widetilde{\chi_k}) - \zeta^{-k}\widehat{f_1}(\widetilde{\chi_k})\right).$$

(c) En déduire une méthode efficace pour calculer $\widehat{f}(\chi_j)$ pour tout j. Evaluer sa complexité.

Exercice 6. [Tables de caractères de petits groupes]

(a) Calculer la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.

(b) Soit H_8 le groupe des quaternions, constitué des matrices $\pm I_2, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Calculer ses classes de conjugaison et sa table de caractères.

(c) Soit D_{2n} le groupe diédral, c'est-à-dire le groupe des isométries du n-gone régulier. On choisit s une symétrie de D_{2n} et r la rotation d'angle $2\pi/n$, démontrer que r et s engendrent D_{2n}, et que $srs^{-1} = r^{-1}$.

(d) Donner les classes de conjugaison de D_{2n}, en distinguant les cas pair et impair.

(d) Calculer la table de caractères de D_{2n}, en distinguant les cas pair et impair. Que peut-on dire de celle de D_8 ?

Exercice 7. [Table des caractères de $\mathfrak{A}_5$]

(a) Calculer les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$. En déduire que celui-ci a 5 représentations irréductibles distinctes.

(b) Calculer les lignes de la table correspondant aux caractères triviaux et standard. Démontrer que les dimensions des représentations irréductibles restantes sont 3,3 et 5, dont on note les caractères χ_3, χ_3' et χ_5.

(c) Calculer le caractère de la représentation associée à l'action de $\mathfrak{A}_5$ sur les paires d'éléments de $[|1, 5|]$. En déduire les valeurs de χ_5.

(d) Utiliser l'orthogonalité des caractères pour compléter la table.

Exercice 8. Soit V une représentation fidèle de G de caractère χ et ϕ un caractère irréductible de G.

(a) Montrer que la seule classe de conjugaison C de G pour laquelle $\chi(C) = \dim V$ est $C = \{e\}$.

(b) Ecrire le produit scalaire $\langle \phi, \chi^n \rangle$ en fonction des classes de conjugaison de G. En déduire une expression de la série génératrice $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \phi, \chi^n \rangle T^n$.

(c) Montrer qu'il existe n tel que la représentation irréductible de caractère ϕ est une sous-représentation de $V^{\otimes n}$.

Exercice 9. [Algèbres de groupe]

La R-algèbre d'un groupe G sur un anneau commutatif R est le R-module libre de base $(e_g)_{g \in G}$ muni de la multiplication

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g e_g\right)\left(\sum_{g \in G} \mu_h e_h\right) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h e_{gh}.$$

(a) Montrer qu'une représentation k-linéaire de G est exactement un $k[G]$-module.

(b) Montrer que le centre de $R[G]$ est le R-module libre engendré par les $\sum_{g \in C} e_g$ avec C une classe de conjugaison de G.

(c) En déduire que pour toute classe de conjugaison C et toute représentation irréductible V, l'application $\phi_C = \sum_{g \in C} g$ est une homothétie de rapport λ_C, où λ_C est un entier algébrique.

(d) Prouver que la dimension de V divise l'ordre de G.

Exercice 10. [Représentations fidèles] Une représentation (V, ρ) de G est dite fidèle si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est injective.

(a) Exhiber une représentation fidèle de G.

(b) Montrer que pour le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$, la représentation standard est irréductible.

(c) Montrer que si G est simple, toute représentation non triviale est fidèle.

(d) Montrer que tout sous-groupe distingué de G est une intersection de noyaux de représentations irréductibles.

(e) En déduire que si toute représentation irréductible non triviale de G est fidèle, le groupe G est simple.

(f) En déduire que G est simple si et seulement si $\chi(g) \neq \chi(1)$ pour tout g non trivial et tout caractère irréductible χ non trivial de G.

Exercice 11. Montrer que si H est un sous-groupe commutatif de G, toute représentation irréductible de G est de cardinal au plus $(G : H)$.