

ANNEAUX EUCLIDIENS, PRINCIPAUX, FACTORIELS

Exercice 1.

- (a) Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.
- (b) Montrer que pour un corps K , l'anneau des séries formelles $K[[X]]$ est euclidien.

Exercice 2. [Anneaux d'entiers quadratiques]

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré. On note \mathcal{O}_d l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ qui sont

- (a) Montrer que \mathcal{O}_d est égal à $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$ ou $d = 2$ et égal à $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{d})/2]$ si $d \equiv 3 \pmod{4}$.
- (b) On note $N : z \mapsto |z|^2$. Montrer que N est à valeurs entières sur \mathcal{O}_d et en déduire les unités de \mathcal{O}_d .
- (c) Montrer que \mathcal{O}_d est euclidien pour la norme N si et seulement si $d = 1, 2, 3, 7$ ou 11 .
- (d) Dans le cas de $\mathbb{Z}[i]$, chercher ses irréductibles et en déduire les nombres premiers s'écrivant comme somme de deux carrés dans \mathbb{Z} .

Exercice 3.

Soit $n \geq 1$ et f un endomorphisme de \mathbb{Z}^n de déterminant non nul. Montrer que l'indice de $f(\mathbb{Z}^n)$ dans \mathbb{Z}^n est la valeur absolue du déterminant de f .

Exercice 4. [Critère d'Eisenstein]

- (a) Soit $n \geq 2$ et K un corps de caractéristique différente de 2. Montrer par récurrence que

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1$$

est irréductible dans $K[X_1, \dots, X_n]$. Que se passe-t-il en caractéristique 2?

- (b) Soit $n \geq 2$ et K un corps de caractéristique première à n . Montrer que $X^n + Y^n - 1$ est irréductible sur $K[X, Y]$.

Exercice 5. [Lemme des noyaux] Soit K un corps, E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u .

- (a) Montrer que si $P = QR$ avec $Q, R \in K[X]$ premiers entre eux, alors

$$E = \text{Ker } Q \oplus \text{Ker } R$$

et que les projections selon cette décomposition sont des polynômes en u .

- (b) Si K est algébriquement clos, en déduire la décomposition de Dunford, c'est-à-dire que tout endomorphisme de E s'écrit de manière unique comme

$$u = d + n$$

avec d diagonalisable et n nilpotent (et ils sont tous les deux des polynômes en u).

Exercice 6. [Anneaux non factoriels]

(a) Montrer que pour un corps K quelconque, $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ n'est pas factoriel malgré l'existence d'une décomposition en irréductibles.

Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions entières sur \mathbb{C} .

- (b) Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est intègre, et trouver ses inversibles.
- (c) Montrer que les irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ sont à inversible près les fonctions de la forme $z \mapsto z - z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- (d) En déduire que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est pas factoriel.

Exercice 7. [Diviseurs élémentaires]

(a) Trouver les diviseurs élémentaires de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}).$$

(b) Trouver la structure canonique des groupes abéliens donnés par générateurs et relations suivants :

G_1 engendré par x, y et z tels que $15x = 0$, $x + y + z = 0$ et $3x + 8y = 0$.

G_2 engendré par x, y et z tels que

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \\ 7x + 4y + 10z = 0 \end{cases}$$

Exercice 8. [Invariants de similitude] Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

(a) En considérant E comme un $K[X]$ -module via $P \cdot x = P(u)(x)$, montrer qu'il existe des polynômes unitaires $P_1 | \dots | P_r$ tels qu'en tant que $K[X]$ -module,

$$E \cong K[X]/(P_1) \times \dots \times K[X]/(P_r).$$

(b) En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

où pour un polynôme P , C_P est sa matrice compagnon.

(c) Montrer que P_r est le polynôme minimal de u , $P_1 \dots P_r$ son polynôme caractéristique, et que P_1, \dots, P_r caractérisent les classes de similitude de $M_n(K)$. En déduire que si deux matrices de $M_n(K)$ sont semblables dans une extension de K , elles le sont dans $M_n(K)$.

(d) Montrer qu'aux facteurs constants près, P_1, \dots, P_r est la suite des diviseurs élémentaires de la matrice $XI - M \in M_n(K[X])$. En déduire un algorithme pour calculer les invariants de similitude d'un endomorphisme.

Exercice 9. [Théorème des diviseurs élémentaires] Soit A un anneau principal et M une matrice de $M_{m,n}(A)$.

(a) Pour $k \leq \min(m, n)$, on note $D_k(M)$ le pgcd des mineurs de taille k de M . Montrer que $D_k(M) = D_k(M')$ si M et M' sont équivalentes dans A .

En déduire que les diviseurs élémentaires, s'ils existent, sont bien définis à inversibles près.

(b) Montrer qu'il suffit de prouver que toute matrice M est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} D_1(M) & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

avec M' de taille $m-1, n-1$ et dont tous les coefficients sont divisibles par $D_1(M)$.

(c) Montrer qu'en multipliant par des matrices de transvection généralisées à droite et à gauche, on peut obtenir que m_{11} divise tous les éléments de la première ligne et la première colonne de M .

(d) Si $(m_{11}) = (D_1(M))$, conclure.

(e) Si $(m_{11}) \neq (D_1(M))$, montrer qu'il existe une matrice $M^{(2)}$ équivalente à M telle que $m_{11}^{(2)}$ divise strictement m_{11} . Expliquer pourquoi le procédé doit s'arrêter et conclure.