Grothendieck et la théorie des schémas

Avec partialité et néanmoins bonne conscience, je situe le début de la géométrie algébrique moderne en 1955, avec la parution de “Faisceaux algébriques cohérents”. Serre y utilise la topologie de Zariski et le langage des faisceaux. Il se limite aux variétés de type fini sur un corps algébriquement clos, mais, peu après, Grothendieck développe la théorie des schémas en toute généralité et en présente les grandes lignes dans sa conférence au congrès ICM de 1958. Avec l'introduction des schémas, la géométrie algébrique a désormais ses objets, mais aussi ses morphismes, ce qui n'allait pas de soi dans les présentations antérieures, où applications rationnelles et correspondances étaient omniprésentes. Grâce aux espaces annelés, à leurs topologies sous-jacentes et leurs faisceaux de fonctions, le géomètre algébriste dispose d'un confort et d'une souplesse d'utilisation en tout point comparables à la situation déjà acquise en topologie générale et en géométrie différentielle.

Le premier coup d'éclat de Grothendieck, en géométrie algébrique, est la démonstration en 57-58, d'un théorème de Riemann-Roch pour un morphisme propre $X \to Y$ entre variétés lisses quasi-projectives. Il fait suite aux travaux de Hirzebruch sur les variétés compactes complexes. Le texte est rédigé par Borel et Serre, dans le langage de FAC. Grothendieck introduit le groupe $K(X)$ des faisceaux cohérents sur X et leurs classes de Chern.

Le point de vue fonctoriel

On considère qu'Eilenberg est le père des catégories. Mais, incontestablement, Grothendieck a beaucoup contribué à les populariser. Elles sont au cœur de son travail. Il montre toute leur richesse et leur souplesse d'utilisation. Grothendieck a une approche très exhaustive des mathématiques. Quand il aborde une théorie, il se place spontanément dans le cadre le plus général et celui-ci s'exprime idéalement dans le langage des catégories. Bien des années plus tard, il écrira fort joliment, dans “Récoltes et Semailles” ; <<. . . , je n'ai pu m'empêcher, au fur et à mesure, de construire des maisons, des très vastes et des moins vastes, et toutes bonnes à être habitées, – des maisons où chaque coin et recoin est destiné à devenir lieu accueillant et familier pour plus d'un. Les portes et fenêtres sont d'aplomb et s'ouvrent et se ferment sans entrebâiller et sans grincer, le toit ne fuit pas et la cheminée tire>>.

Il observe que si C est une catégorie et si $C^\wedge$ désigne la catégorie des foncteurs (contravariants) sur C, à valeurs dans les ensembles, on dispose d'un foncteur $h : C \to C^\wedge$, qui, à tout objet X associe le foncteur h_X qui, sur l'objet Y de C, prend la valeur $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$. De plus, ce foncteur h est pleinement fidèle.

Appliqué aux schémas, ce point de vue introduit une véritable révolution: jusque là, la géométrie algébrique mettait l'accent sur les corps, maintenant ce sont les anneaux commutatifs qui sont au cœur de la place. Toutefois le langage géométrique est préservé et $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$ va encore s'appeler l'ensemble des “points” de X à valeurs dans Y. Pour connaître un schéma X, il faut connaître ses points à valeurs dans tout schéma Y et beaucoup de propriétés de X se voient sur le foncteur des points.

Certaines notions classiques sont complètement renouvelées. Ainsi on connaissait les variétés lisses (jusque là appelées simples). Maintenant la lissité d'un morphisme se lit sur le foncteur et même sur le foncteur à valeurs dans les anneaux locaux artiniens, une propriété qui n'était pas formulable avec le point de vue classique où l'on ne travaillait qu'avec des variétés réduites. Dans la même veine, les calculs sur les nombres duaux et, plus généralement, les problèmes de déformations infinitésimales s'insèrent parfaitement dans l'approche fonctorielle.

Grothendieck magnifie la trilogie chère à la géométrie différentielle : isomorphismes locaux, immersions et submersions, qui deviennent les morphismes étales, non ramifiés et lisses. De plus, chacune de ces notions se teste agréablement sur le foncteur.

En fait, c'est toute l'approche différentielle qui est revivifiée avec l'utilisation des voisinages infinitésimaux de la diagonale. Quelques années plus tard, Grothendieck franchira une nouvelle étape qui le conduira au site cristallin.

Cette adoption du point de vue fonctoriel ne va pas sans résistance. Les premiers exposés de "Fondements de la géométrie algébrique", au séminaire Bourbaki, se déroulent devant un public quelque peu noyé sous les foncteurs. Bien des géomètres restent indifférents à ce nouveau point de vue : ils ne voient pas l'intérêt de ces développements catégoriels qui, pour eux, sont des "maths molles", par opposition aux "maths dures" qu'ils pratiquent.

Pourtant, Grothendieck va faire des efforts pédagogiques considérables pour expliquer son point de vue. Il convient, certes, qu'un investissement est nécessaire au départ, pour entrer dans "son yoga" ; mais ensuite, la théorie se déroule toute en douceur, pour le plus grand confort de l'utilisateur. Dieudonné insistera sur le caractère naturel de la théorie des schémas.

En 60-61, le séminaire Cartan, porte sur les familles de surfaces de Riemann compactes. Douady donne les premiers exposés en adoptant le point de vue des espaces de Teichmüller. Grothendieck objecte que, selon lui, ce n'est pas la bonne approche. Avec l'accord de Cartan, il prend alors le séminaire en main et expose les bases de la géométrie analytique complexe. C'est l'occasion pour lui, de présenter le point de vue fonctoriel, dans le cadre analytique cette fois. Il décrit quelques-unes des constructions de base, insiste sur la représentabilité et la représentabilité relative. Rodé par la rédaction des EGA, il donne sa pleine mesure et aboutit à un texte magnifique, très didactique, que je ne saurais trop recommander au géomètre débutant.

La géométrie relative

Avec le développement du point de vue fonctoriel, vient tout naturellement la géométrie algébrique relative, sur une base S, et l'opération de changement de base. Le "produit fibré" acquiert une importance primordiale. Il est utilisé de façon dissymétrique : on part de $f : X \to S$, avec, en général, certaines conditions de finitude sur f, puis on fait un changement de base $S' \to S$, plus ou moins arbitraire, pour aboutir à $X \times_S S' \to S'$. La géométrie absolue s'estompe, puisque, même si l'on part d'une variété sur un corps k, il y a lieu de considérer ses points dans tout k-schéma.

Quand Serre arrive en avance à l'IHES, il prend la craie et dessine au tableau

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

qui devient la marque déposée du séminaire de Bures.

Clairement, pour Grothendieck, il y a d'abord les notions qui se comportent bien par changement de base . Elles forment le socle de la théorie et il y a lieu de les étudier en priorité, avec le plus grand soin. Puis, éventuellement, il y a les autres. En fait, il n'y en a pas tellement d'autres, car beaucoup de propriétés autrefois vues comme absolues, admettent une version relative naturelle, sous des hypothèses de finitude et de platitude convenables.

De fait, au fur et à mesure de l'avancement des EGA et des SGA, c'est toute une terminologie cohérente, adaptée à la géométrie algébrique relative, qui se met en place. Grothendieck, tout comme Serre d'ailleurs, accorde beaucoup d'importance au choix du vocabulaire. Il doit être simple, précis et évocateur. L'introduction des mots "lisse" et "étale" est un succès. Par contre, Grothendieck regrettera d'avoir choisi "non ramifié", qu'il juge trop long à écrire et qui présente, de façon négative, une propriété pourtant très naturelle et très utile. Il proposera alors de remplacer "non ramifié" par "net". Dans le même souci de concision, il suggèrera d'appeler le spectre d'un anneau de valuation discrète un "trait". Mais il est alors sur le point de se retirer du devant de la scène et cette terminologie sera peu suivie.

La présentation finie

Faire de la géométrie relative, d'accord, mais dans quel cadre ? Beaucoup des sorites sur les schémas se déroulent sans aucune hypothèse de finitude. Les premiers SGA se situent dans le contexte des schémas localement noethériens.

C'est un peu plus tard, me semble-t-il, peut-être en préparant déjà la rédaction de EGA IV et avec SGA 4, que Grothendieck découvre les charmes de la présentation finie. Il observe, qu'un S-schéma X est localement de présentation finie si et seulement si le S-foncteur de ses points commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux. Dès lors, le fait que cette condition de finitude se lise commodément sur le foncteur, est une incitation à l'explorer et, à partir de EGA IV, Grothendieck la considère systématiquement. Certes, travailler avec des S-schémas de (locale) présentation finie est assurément un bon cadre, qui flatte le rédacteur : la base est générale, et les conditions de finitude introduites sur les objets relatifs, sont naturelles. Mais, ne serait-ce que pour des raisons historiques, liées aux références, on doit fréquemment opérer des passages à la limite pour revenir au cas noethérien, ce qui conduit à une rédaction assez lourde et répétitive. Notons toutefois que certains de ces passages à la limite comme ceux concernant la platitude ou la projectivité sont fort instructifs. En quelques années, la technique de passage à la limite inductive filtrante sur les anneaux devient familière, alors qu'auparavant, on ne l'utilisait guère que pour appliquer le "principe de Lefschetz".

Avec la thèse de Monique Hakim, Grothendieck va aller encore plus loin. Pourquoi s'imposer une base qui soit un schéma ? On peut faire de la géométrie algébrique relative sur des espaces topologiques, des variétés différentielles ou analytiques, finalement sur un espace annelé, voire un topos annelé.

La platitude

Dans GAGA, Serre donne un superbe exemple de "couple plat" à propos du passage de l'algébrique à l'analytique. Avec Grothendieck, la platitude va jouer un rôle considérable...

Elle se manifeste de plusieurs façons.

Tout d'abord, elle est au cœur de la géométrie relative. Si l'on pense à un morphisme $f : X \to S$ comme à une famille de schémas sur des corps, paramétrée par les points de S, imposer que f est plat est l'hypothèse la plus commode qui assure qu'une fibre de f au-dessus d'un point s de S, est "exactement" contenue dans l'adhérence schématique d'une fibre au-dessus d'une générisation de s. Ainsi, la platitude apparaît comme un liant naturel entre les fibres, en géométrie relative. Toutefois, la platitude n'est pas une propriété tout à fait "géométrique" ; elle garde, malgré tout, un caractère "algébrique". Par exemple, si S est local artinien, la platitude de f traduit simplement que les anneaux des ouverts affines de X sont des modules libres sur l'anneau de S. Or, dans le contexte noethérien, la platitude se teste précisément, par passage à la limite sur les anneaux locaux artiniens. C'est l'occasion pour Grothendieck, de démontrer un délicat critère de platitude qu'il propose à Bourbaki. Il figure dans Bourbaki Alg. Com. Chap 3.

Précisons les rapports de Grothendieck avec Bourbaki. Dès qu'il entreprend la rédaction des EGA, il n'assiste plus aux congrès, mais reste en bons termes avec le groupe. Comme orateur au séminaire, il jouit d'un statut un peu spécial. Bourbaki est conscient que ses exposés de fondements de la géométrie algébrique seront très utiles et que l'on ne disposera pas d'une autre rédaction avant longtemps. Dès lors Grothendieck est autorisé à proposer des textes écrits plus longs et expose ses propres travaux, ce qui est inhabituel.

Mais revenons à la platitude. Un avantage technique de la notion est que, sous des hypothèses de finitude raisonnables (noethériennes, présentation finie), nombre de propriétés courantes d'un morphisme $f : X \to S$, se lisent sur les fibres, sous l'hypothèse que f est plat. On dispose ainsi d'une méthode générale pour passer de la géométrie sur les corps à la géométrie relative et réciproquement.

Dans un contexte noethérien, les notions de dimension et de profondeur se comportent fort bien lorsque f est plat. Ainsi se développe tout un chapitre d'algèbre commutative relative, utile et facile. Plus tard, dans EGA IV, Grothendieck fera face à des questions autrement délicates d'algèbre commutative, qui lui permettront de compléter les travaux de Nagata : il dégagera la notion de schéma excellent et prouvera de précieux énoncés de permanence.

La platitude, sous des conditions de finitude convenables est idéale pour l'étude des propriétés locales et d'ouverture. Suivant la voie initiée par Serre dans "Algèbre locale et multiplicités", Grothendieck "module" systématiquement ses énoncés. Ainsi un bon cadre est de considérer un morphisme $X \to S$ localement de présentation finie, et un O_X-faisceau de présentation finie M, qui est S-plat.

Mais la platitude apparaît de façon essentielle sous un autre angle : celui de la descente fidèlement plate quasi-compacte (fpqc). C'est là une merveilleuse découverte qui se révèle d'une portée considérable : les propriétés usuelles, utilisées en géométrie algébrique, peuvent se tester après changement de base fpqc. Cette observation, va bien au-delà de la descente galoisienne de Weil et de la descente radicielle de Cartier. Le concept de descente apparaît dès SGA 1. Grothendieck développe un langage et un formalisme pour pouvoir l'énoncer. La notion généralise celle des recouvrements ouverts et préfigure les topologies de Grothendieck. La descente fpqc des propriétés des objets est remarquablement simple à établir ; la descente des objets eux mêmes, est moins automatique. Grothendieck n'est toutefois pas entièrement satisfait par sa propre exposition et renonce finalement à développer les considérations générales sur les catégories fibrées qui lui semblent pourtant nécessaires. Peut être a-t-il déjà en tête la théorie des champs qui sera le sujet de thèse de Jean Giraud.

Ainsi, la géométrie algébrique est profondément renouvelée et s'organise autour de puissantes techniques de localisation. Partant d'un morphisme de type fini $X \to S$ sur une base noethérienne, par passage à la limite sur les voisinages de Zariski d'un point de S, on se ramène au cas d'une base locale. Puis par complétion et descente, au cas où l'anneau local est noethérien complet ; éventuellement, ensuite, par passage à la limite adique, au cas d'un anneau local artinien. Plus tard, avec le développement des techniques d'hensélisation, introduites pour les besoins de la topologie étale, on partira plutôt d'un morphisme de présentation finie, et la complétion pourra être remplacée par l'hensélisation, plus algébrique et qui ne nécessite pas d'hypothèses noethériennes.

Projectivité et propreté

L'étude globale des morphismes est abordée dans EGA II. Grothendieck déroule le sorite des spectres homogènes. Il définit les fibrés projectifs et le point de vue fonctoriel l'amène à privilégier les faisceaux quotients inversibles, donc les hyperplans d'un vectoriel, plutôt que les droites, qui prévalaient dans le point de vue de la géométrie algébrique projective classique.

La notion de morphisme propre, définie à partir de la propriété d'être universellement fermé, s'impose aussi bien en topologie générale (elle est ajoutée dans la seconde édition du chap I de topologie générale de Bourbaki) qu'en géométrie algébrique. L'écart entre propre et projectif se clarifie. Nagata donne le premier exemple d'une surface normale propre, non projective, puis Hironaka le premier exemple de variété lisse (en dimension 3). C'est encore Nagata qui montrera que toute variété de type fini séparée se compactifie en une variété propre, énoncé étendu par Deligne au cas relatif noethérien.

Sous des conditions de finitude convenables, la propreté se teste sur le foncteur grâce aux critères valuatifs de séparation et de propreté. Grothendieck n'aime guère les valuations, hormis les valuations discrètes. Il les utilise au minimum et reproche à Bourbaki de leur avoir consacré tout un chapitre. Sans que cela lui soit spécialement imputable, la génération de Grothendieck voit un effacement de l'usage des valuations, si on la compare à ses devancières.

Avec EGA III, le traité aborde les considérations cohomologiques. Grothendieck généralise les résultats de FAC sur les schémas affines et les schémas propres sur une base noethérienne. Puis vient un réjouissant "GAGA algébrique-formel" qui, d'un point de vue technique, est une brillante utilisation des conditions de Mittag-Leffler et du lemme d'Artin-Rees. Cette étude globale dans le cas propre, sera complétée dans SGA2 par l'étude de la cohomologie locale et des énoncés du type GAGA, mais cette fois, dans des situations non nécessairement propres. Notons combien la notion de schéma formel est, elle aussi, novatrice. Quant à l'algébrisation des schémas formels, Grothendieck en donne une jolie application, dès SGA 1, avec la comparaison du groupe fondamental modéré d'une courbe lisse en caractéristique $p > 0$ avec son analogue en caractéristique 0, et finalement, avec le groupe fondamental topologique d'une surface de Riemann.

EGA III continue avec un paragraphe, assez indigeste, sur les "Tor". Il faut dire qu'à l'époque où Grothendieck le rédige, il ne dispose pas encore des catégories dérivées, qui seront le sujet de thèse de Jean-Louis Verdier.

EGA III se termine par l'étude du comportement de la cohomologie cohérente par changement de base, dans un contexte propre et plat. La cohomologie ne commute pas nécessairement aux changements de base, mais on peut la représenter universellement par un complexe à objets cohérents et plats sur la base. A partir de SGA 6, on parlera de complexe parfait.

Considérer un S-schéma noethérien et un morphisme propre $X \to S$, muni d'un faisceau cohérent F S-plat est assurément un bon cadre pour faire de la géométrie algébrique globale relative. Grothendieck en donne une illustration saisissante, au séminaire Bourbaki , avec les schémas de Hilbert. Par leur définition naturelle et leur étude différentielle commode, ceux-ci vont vite supplanter les coordonnées de Chow.

Passage au quotient

Passer au quotient, en géométrie algébrique, par exemple sous l'action d'un groupe algébrique G opérant sur une variété X, a été longtemps un obstacle : les géomètres savaient qu'ils manquaient de suffisamment de fonctions algébriques pour séparer les orbites qu'ils pouvaient raisonnablement espérer séparer. Faute de mieux, ils définissaient le quotient X/G par une propriété universelle parmi les variétés équivariantes sous G.

Pour Grothendieck, ce point de vue n'est guère satisfaisant : on prétend définir un schéma par les flèches qui en sont issues et non par celles qui y aboutissent.

Lorsqu'il aborde les schémas en groupes dans son séminaire SGA 3, avec Michel Demazure, il revient au point de vue fonctoriel. Si l'on a un S-schéma en groupes G qui opère sur un S-schéma X, ou plus généralement si l'on a une relation d'équivalence R sur X, voire un groupoïde, il y a lieu de considérer le préfaisceau quotient qui a tout S-schéma T associe l'ensemble quotient naïf de $X(T)$ par $R(T)$. Ensuite , on passe au faisceau associé pour la topologie fpqc, ou une autre topologie de Grothendieck bien choisie. C'est ce faisceau qu'il y a lieu de considérer comme le véritable quotient X/R. Ainsi, tautologiquement, on en connaît ses points et X/R domine tout quotient schématique. Bien sûr, ce quotient est rarement représentable. Mais avec les exposés de Gabriel dans SGA 3, sont étudiés des cas fort utiles : groupoïdes finis et plats, quotients génériques sous des hypothèses de platitude. Le triomphe survient dans le cas d'une relation d'équivalence projective et plate, annoncé à Bourbaki en 61, qui est le point d'orgue de la construction du schéma de Picard, exposée l'année suivante. Par sa généralité et son élégance, cette construction marque un sommet dans l'utilisation des techniques projectives.

Beaucoup de constructions de schémas de modules conduisent à des problèmes de passage au quotient par le groupe PGL_n. Dans le cas des actions de groupes réductifs, la situation est meilleure, Mumford introduit la notion de stabilité et semi-stabilité dans "Geometric Invariant Theory ", qui paraît en 65. Il est aussi le premier à construire, par voie purement algébrique, sur l'anneau des entiers Z, la variété de modules des courbes propres et lisses et celle des variétés abéliennes polarisées.

Représentabilité

Bien sûr, comme on l'a déjà remarqué, une des raisons qui pousse Grothendieck à adopter le point de vue fonctoriel est que nombre de propriétés usuelles des schémas se lisent commodément sur le foncteur. Dès lors, on peut se demander si, partant d'un foncteur contravariant F, sur la catégorie des schémas, à valeurs dans les ensembles, on peut accumuler des informations de diverse nature sur F, jusqu'à pouvoir garantir la représentabilité de F. C'est là une approche entièrement nouvelle que Grothendieck forge dès les premières années où il s'investit en géometrie algébrique et qu'il affine au fur et à mesure de sa progression. Les résultats vont s'avérer assez stupéfiants.

On en a déjà mentionné quelques-uns. Par exemple, le fait que F soit représentable par un S-schéma localement de présentation finie nécessite que F commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux. Comme signalé, ce fait apparaît un peu plus tard; au début Grothendieck se limite à des bases localement noethériennes.

Par contre, très tôt, Grothendieck met l'accent sur les propriétés d'exactitude à gauche. Elles résultent, principalement, de la descente fpqc et se traduisent en disant que F doit être un faisceau pour la topologie fpqc. Pour nombre de foncteurs naturels, cette propriété découle automatiquement de la théorie de la descente. Mais quelquefois, on part seulement avec un préfaisceau et il y a lieu de prendre pour F le faisceau associé. C'est le cas, par exemple, pour le foncteur de Picard.

Très vite, Grothendieck dégage la notion de proreprésentabilité. Si F est représentable par un S-schéma localement de type fini, sur une base locale noethérienne de point fermé s, les complétés des anneaux locaux de F, aux points fermés de la fibre spéciale au-dessus de s, sont déterminés par la restriction de F à la catégorie des S-schémas locaux artiniens. Réciproquement, la connaissance de F sur la catégorie des S-schémas artiniens, jointe à quelques propriétés d'exactitude à droite, détermine les complétés des anneaux locaux de F aux points fermés. La contribution de Schlessinger dégage des critères de proreprésentabilité, très accessibles en pratique.

L'étape suivante, essentielle, est la commutation de F aux limites adiques. Elle nous fait passer des anneaux artiniens aux complétés des futurs anneaux du schéma représentant F. C'est, a priori, une étape délicate. Mais dans un contexte de faisceaux cohérents sur des schémas propres, elle résulte souvent du GAGA algébrique – formel de EGA III.

A-t-on accumulé suffisamment d'informations pour conclure à la représentabilité de F ? Oui, si l'on ajoute que F est séparé sur S et quasi-fini (disons non ramifié), comme en témoigne l'exposé de Murre à Bourbaki en 1966. En effet, dans ce cas, un argument de récurrence sur la dimension de la base et l'utilisation de la descente fpqc, permettent de passer des complétés aux anneaux locaux eux-mêmes .

L'étape finale, dans ces questions de représentabilité, allait être accomplie par Mike Artin avec son merveilleux théorème d'approximation. On est en 67 ; pour les besoins de la topologie et de la cohomologie étale, l'hensélisation bat son plein. L'énoncé d'approximation d'Artin est un peu rébarbatif à formuler. Essayons malgré tout. Soit A un anneau local, essentiellement de type fini sur un anneau de valuation discrète excellent. Notons m son idéal maximal, $A^\wedge$ son complété m-adique et A^h son hensélisé. Considérons un système d'équations dans $A[T_1, \ldots, T_r]$ qui admet une solution s dans $A^\wedge$. Alors il admet une solution dans A^h arbitrairement proche de s, m-adiquement. La démonstration résulte d'une habile application du théorème de préparation de Weierstrass.

Signalons, pour la petite histoire, que Chevalley a, autrefois, démontré la variante analytique complexe, mais que, faute d'en trouver des applications, il n'a pas cru devoir la publier. Artin, au contraire, voit tout l'intérêt de la version hensélienne. Il adapte l'énoncé à l'approximation du foncteur F que l'on souhaite représenter. En le combinant avec les critères patiemment accumulés par Grothendieck, il en conclut que F, à défaut d'être représenté par un schéma, est "représenté" par un "espace algébrique", c'est-à-dire par un faisceau étale, quotient d'un schéma localement de présentation finie par une relation d'équivalence étale.

Je me suis souvent demandé si Grothendieck avait imaginé une conclusion aussi satisfaisante. Oui, peut-être ? En tout cas, si Grothendieck en a rêvé, Artin l'a fait.

Autant dire que l'énoncé d'Artin "tue" la représentabilité qui perd tout son mystère : la représentabilité (du moins comme espace algébrique) est maintenant découpée en une somme de propriétés qui, dans la pratique, sont aisées à vérifier séparément. Bien sûr, il faudrait réécrire toute la géométrie algébrique, dans le cadre des espaces algébriques, un programme esquissé par Artin et Knutson.

Aujourd'hui, l'intérêt pour les espaces algébriques a quelque peu faibli et l'accent est plutôt mis sur les champs qui permettent de mieux cerner la réalité géométrique.