ÉCOLE DE PRINTEMPS D'ANALYSE COMPLEXE - RABAT (MAROC)

Alain DUFRESNOY et Christine LAURENT-THIÉBAUT

Mai 2000

Chapitre 1

Formules de représentation intégrale. Lemme de Dolbeault

Cette première partie est consacrée à la démonstration des formules intégrales classiques : la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman et la formule de Cauchy-Fantappié. Ces formules sont tout particulièrement utilisées pour la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann avec estimations höldériennes. Elles permettent également de prouver un Lemme de Poincaré pour l'opérateur de Cauchy-Riemann.

1.1 Noyau et formule de Bochner-Martinelli-Koppelman

Pour $(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, on pose $\langle \xi,\eta\rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\eta_j$. On considère l'ensemble E défini par $E = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid \langle \xi,\eta\rangle \neq 0\}$, et sur l'ouvert E on définit la forme différentielle μ par $\mu(\xi,\eta) = \langle \xi,\eta\rangle^{-n}\omega'(\xi) \wedge \omega(\eta)$ avec

$$\omega(\eta) = d\eta_1 \wedge \cdots \wedge d\eta_n \quad \text{et} \quad \omega'(\xi) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\xi_j d\xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$

où $\widehat{d\xi_j}$ signifie que l'on a supprimé le terme $d\xi_j$.

Lemme 1.1.1 *La forme différentielle μ vérifie $d\mu = 0$ sur E.*

Démonstration. Calculons $d\mu$.

$$d\mu = n\langle \xi,\eta\rangle^{-n}\omega(\xi) \wedge \omega(\eta) - n\langle \xi,\eta\rangle^{-n-1}d(\langle \xi,\eta\rangle) \wedge \omega'(\xi) \wedge \omega(\eta).$$

Comme $d(\langle \xi, \eta \rangle) \wedge \omega'(\xi) \wedge \omega(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle \omega(\xi) \wedge \omega(\eta)$, on a bien $d\mu = 0$. $\square$

On note Δ la diagonale de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. L'application $\hat{s}$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par $\hat{s}(\zeta, z) = (\overline{\zeta} - \overline{z}, \zeta - z)$ a donc son image dans E. On considère alors la forme différentielle $\hat{s}^*\mu$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ et fermée puisque μ est fermée.

Définition 1.1.2 *On appelle* noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman *la forme différentielle sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ définie par $B = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \hat{s}^*\mu$. On a*

$$B(z,\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j) \bigwedge_{s \neq j} (d\overline{\zeta}_s - d\overline{z}_s) \wedge \omega(\zeta - z)}{|\zeta - z|^{2n}}. \quad (1.1)$$

On pose $B = \sum_{\substack{0 \le p \le n \\ 0 \le q \le n-1}} B^p_q$, où B^p_q est de type (p,q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ. On pose également $B^p_{-1} = 0$.

Lemme 1.1.3 *Pour tout $(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$, on a*

$$\overline{\partial} B(z,\zeta) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_z B^p_q(z,\zeta) = -\overline{\partial}_\zeta B^p_{q+1}(z,\zeta).$$

En particulier $\overline{\partial}_\zeta B^0_0(z,\zeta) = 0$.

Démonstration. Notons $k_{BM}(x)$ la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ privé de 0 définie par $k_{BM}(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \mu(\overline{x}, x)$. C'est une $(n, n-1)$-forme et par conséquent $\overline{\partial} k_{BM} = dk_{BM}$. Remarquons que $B = \tau^* k_{BM}$ où τ est l'application holomorphe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n, (z,\zeta) \mapsto \zeta - z$. On en déduit donc que $\overline{\partial} B = dB$. Comme $B = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \hat{s}^*\mu$ et $d\mu = 0$ on a donc $\overline{\partial} B = dB = 0$. On obtient la seconde relation en comparant les bidegrés. $\square$

On peut donner une autre écriture de B en utilisant la notion de déterminant sur une algèbre. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre quelconque (par exemple l'algèbre des formes différentielles) et si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathcal{A}$, on pose

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{E}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et $\mathcal{E}(\sigma)$ la signature de la permutation σ. Ce déterminant a les propriétés suivantes :

(i) $\det A$ dépend linéairement des colonnes de A pour des combinaisons linéaires à coefficients dans le centre de $\mathcal{A}$.

(ii) Si pour des entiers k et ℓ, $1 \leq k < \ell \leq n$, $a_{ik} = b_k c_i$ et $a_{i\ell} = b_\ell c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, où b_k et b_ℓ sont des éléments quelconques de $\mathcal{A}$ et où les c_i sont dans le centre de $\mathcal{A}$, alors $\det A = 0$.

On peut alors écrire

$$\omega'(\xi) = \frac{1}{(n-1)!} \det \begin{pmatrix} \xi_1 & d\xi_1 \cdots & d\xi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & d\xi_n \cdots & d\xi_n \end{pmatrix}$$

ce que l'on notera encore

$$\omega'(\xi) = \frac{1}{(n-1)!} \det(\xi, \underbrace{d\xi}_{n-1}).$$

On en déduit l'écriture suivante du noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman

$$B(z,\zeta) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \frac{\det(\overline{\zeta} - \overline{z}, \overbrace{d\overline{\zeta} - d\overline{z}}^{n-1}) \wedge \omega(\zeta - z)}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Remarque. Observons que pour $n = 1$, on a $B_0^0(z,\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$. C'est le noyau de Cauchy usuel.

Proposition 1.1.4 *Le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman B est une forme différentielle localement intégrable sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ qui définit un courant que l'on note encore B satisfaisant*

$$dB = \overline{\partial} B = [\Delta] \tag{1.2}$$

où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale Δ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Démonstration. Soient $\tau : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application $(z,\zeta) \mapsto \zeta - z$ et k_{BM} la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ définie par

$$k_{BM}(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} |x|^{-2n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{x}_j \big(\underset{j \neq s}{\wedge} d\overline{x}_s \big) \wedge \omega(x).$$

Les coefficients de k_{BM} sont localement intégrables dans $\mathbb{C}^n$ car ce sont des $O(|x|^{-2n+1})$ et par conséquent k_{BM} définit un courant sur $\mathbb{C}^n$. Remarquons que

$$k_{BM}(x) = \frac{(n-2)!}{(2i\pi)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (-|x|^{-2n+2}) \big(\underset{s \neq j}{\wedge} d\overline{x}_s \big) \wedge \omega(x)$$

et donc

$$dk_{BM}(x) = \overline{\partial} k_{BM}(x) = \frac{(n-2)!}{(2i\pi)^n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \overline{x}_j} (-|x|^{-2n+2}) \Big) \omega(\overline{x}) \wedge \omega(x).$$

On reconnaît alors la solution fondamentale du Laplacien

$$E(x) = \frac{(n-2)!}{\pi^n} \frac{1}{|x|^{2n-2}}, \quad x \in \mathbb{C}^n,$$

d'où

$$dk_{BM} = \overline{\partial} k_{BM} = [0] \tag{1.3}$$

où $[0]$ est le courant d'intégration en 0, c'est-à-dire la masse de Dirac en 0. Observons que $B = \tau^* k_{BM}$ et B est donc localement sommable sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et définit un courant que l'on note encore B. En considérant les images réciproques des courants k_{BM} et $[0]$ par la projection τ, on déduit de (1.3) le résultat suivant

$$dB = \overline{\partial} B = \overline{\partial}(\tau^* k_{BM}) = \tau^*(\overline{\partial} k_{BM}) = \tau^*[0] = [\tau^{-1}(0)] = [\Delta].$$

$\square$

Nous allons prouver maintenant une formule de représentation intégrale, la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman.

Théorème 1.1.5 Formule de Bochner-Martinelli-Koppelman. *Soient D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$, f une (p,q)-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$* $(0 \leq p \leq n, 0 \leq q \leq n)$. *Alors*

$$\int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge B_q^p(z,\zeta) - \int_{\zeta \in D} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge B_q^p(z,\zeta)$$
$$+ \overline{\partial}_z \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B_{q-1}^p(z,\zeta) = \begin{cases} (-1)^{p+q} f(z) & \textit{sur } D \\ 0 & \textit{sur } \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

où $\overline{\partial}_z$ est calculé au sens des courants.

Démonstration. Nous allons faire la démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{D}$. On définit l'opérateur $\overline{\partial}$ pour un courant T de bidegré $(p,q-1)$ de la manière suivante : si φ est une forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré $(n-p,n-q)$ à support compact dans $\mathbb{C}^n$ on pose

$$\langle\overline{\partial}T,\varphi\rangle=(-1)^{p+q}\langle T,\overline{\partial}\varphi\rangle.$$

Le théorème équivaut alors à

$$\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge B^p_q(z,\zeta)\wedge\varphi(z)-\int_{(z,\zeta)\in D\times D}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge B^p_q(z,\zeta)\wedge\varphi(z)$$
$$+(-1)^{p+q}\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge B^p_{q-1}(z,\zeta)\wedge\overline{\partial}\varphi(z)=(-1)^{p+q}\int_{z\in D} f(z)\wedge\varphi(z),$$

si φ est à support compact dans D, et

$$\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge B^p_q(z,\zeta)\wedge\varphi(z)-\int_{(z,\zeta)\in D\times D}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge B^p_q(z,\zeta)\wedge\varphi(z)$$
$$+(-1)^{p+q}\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge B^p_{q-1}(z,\zeta)\wedge\overline{\partial}\varphi(z)=0,$$

si φ est à support compact dans $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$. De plus par des considérations de bidegré, on peut remplacer les composantes B^p_q de B par B, $\overline{\partial}f$ par df et $\overline{\partial}\varphi$ par $d\varphi$. Il faut donc prouver

$$\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z)-\int_{(z,\zeta)\in D\times D} df(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z)$$
$$+(-1)^{p+q}\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge d\varphi(z)=(-1)^{p+q}\int_{z\in D} f(z)\wedge\varphi(z),$$

si φ est à support compact dans D, et

$$\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z)-\int_{(z,\zeta)\in D\times D} df(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z)$$
$$+(-1)^{p+q}\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge d\varphi(z)=0,$$

si φ est à support compact dans $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$.

Le second cas résulte immédiatement de la formule de Stokes appliquée à l'ouvert $D\times D$ et à la forme différentielle $f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z)$ car $dB=0$.

Pour le premier cas on considère l'ouvert Δ_ϵ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ défini par

$$\Delta_\epsilon = D \times D \setminus \{(z,\zeta) \in D \times D \mid |z-\zeta| \leq \epsilon\}.$$

Son bord $\partial\Delta_\epsilon$ est la réunion de

$$F_{1,\epsilon} = \partial(D \times D) \setminus \{(z,\zeta) \in D \times D \mid |z-\zeta| \leq \epsilon\}$$

et de

$$F_{2,\epsilon} = \{(z,\zeta) \in \overline{D} \times \overline{D} \mid |z-\zeta| = \epsilon\}.$$

Comme φ est à support compact dans D, la forme différentielle $f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z)$ est nulle sur $\partial D \times D$. Par ailleurs si $\zeta \in \partial D$ et $z \in \mathrm{supp}\ \varphi$ on a

$$|z-\zeta| \geq d(\mathrm{supp}\ \varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$$

et par conséquent si $\epsilon < d(\mathrm{supp}\ \varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$, l'ensemble $\mathrm{supp}\ \varphi \times \partial D$ est inclus dans $F_{1,\epsilon}$. On obtient donc

$$\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) = \int_{(z,\zeta)\in F_{1,\epsilon}} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z).$$

De plus si $z \in \mathrm{supp}\ \varphi$ et $|z-\zeta| = \epsilon$ alors ζ appartient à $\{\xi \in \mathbb{C}^n \mid d(\xi, \mathrm{supp}\ \varphi) \leq \epsilon\}$ qui est un compact de D si $\epsilon < d(\mathrm{supp}\ \varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$ donc pour ϵ assez petit si $z \in \mathrm{supp}\ \varphi$ et $(z,\zeta) \in F_{2,\epsilon}$ alors (z,ζ) varie dans un compact de $D \times D$ et donc

$$\int_{(z,\zeta)\in F_{2,\epsilon}} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) = \int_{|z-\zeta|=\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z).$$

Finalement pour $\epsilon < d(\mathrm{supp}\ \varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) - \int_{|z-\zeta|=\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) \\ = \int_{(z,\zeta)\in\partial\Delta_\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z),\end{aligned}$$

où $\{|z-\zeta| = \epsilon\}$ est orienté par la normale extérieure.

La formule de Stokes donne alors

$$\begin{aligned}\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) - \int_{|z-\zeta|=\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) \\ = \int_{(z,\zeta)\in\Delta_\epsilon} d_{z,\zeta}(f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z))\end{aligned}$$

$$= \int_{(z,\zeta)\in\Delta_\epsilon} df(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) + (-1)^{p+q-1} \int_{(z,\zeta)\in\Delta_\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge d\varphi(z),$$

car $dB = 0$ sur Δ_ϵ.

Il est facile de voir que B vérifie la majoration

$$|B(z,\zeta)| \leq C_L |\zeta - z|^{-2n+1}$$

pour $\zeta \in \overline{D}$ et z dans un compact L de $\mathbb{C}^n$, donc B est localement intégrable sur $D \times D$ et on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{(z,\zeta)\in\Delta_\epsilon} df(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) = \int_{(z,\zeta)\in D\times D} df(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z),$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{(z,\zeta)\in\Delta_\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge d\varphi(z) = \int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge d\varphi(z).$$

Il reste à prouver que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z-\zeta|=\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) = (-1)^{p+q} \int_{z\in D} f(z) \wedge \varphi(z).$$

Considérons l'automorphisme $T : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ défini par $T(z,w) = (z, z+w)$, T transforme $\mathbb{C}^n \times S(0,\epsilon)$ en $\{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid |z-\zeta| = \epsilon\}$ et par conséquent

$$I_\epsilon = \int_{|z-\zeta|=\epsilon} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z) = \int_{\mathbb{C}^n \times S(0,\epsilon)} T^*(f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \wedge \varphi(z))$$

Mais $T^*B(z,w) = C_n |w|^{-2n} \omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)$, avec $C_n = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}$ et si

$$f(\zeta) = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}(\zeta) d\zeta_I \wedge d\overline{\zeta}_J,$$

alors

$$T^* f(z,w) = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}(z+w) d(z+w)_I \wedge d(\overline{z+w})_J.$$

On obtient donc

$$I_\epsilon = \sum_{|I|=p,|J|=q} C_n \int_{\mathbb{C}^n \times S(0,\epsilon)} f_{IJ}(z+w) d(z+w)_I \wedge d(\overline{z+w})_J \wedge \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} \wedge \varphi(z).$$

Grâce au théorème de Fubini on peut écrire

$$I_\epsilon = (-1)^{p+q} \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \int_{\mathbb{C}^n} [\int_{S(0,\epsilon)} C_n f_{IJ}(z+w) \wedge \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}}]\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \wedge \varphi(z).$$

On pose alors $J_\epsilon(z) = \int_{S(0,\epsilon)} C_n f_{IJ}(z+w) \wedge \frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}}$. Remarquons que $\frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}} = O(\epsilon^{1-2n})$ sur $S(0,\epsilon)$ et par conséquent l'intégrale $J_\epsilon(z)$ va être bornée indépendamment de ϵ et de z. Le théorème de Lebesgue montre alors que

$$lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon = (-1)^{p+q} \sum_{|I|=p,|J|=q} C_n \int_{\mathbb{C}^n} lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(z) dz_I \wedge d\overline{z}_J \wedge \varphi(z).$$

Il reste alors à prouver que $lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(z) = f(z)$. La formule de Stokes nous donne $\int_{S(0,\epsilon)} C_n \frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}} = 1$ et par conséquent en utilisant la continuité de f on a

$$lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(z) - f(z) = lim_{\epsilon\to 0} \int_{S(0,\epsilon)} C_n (f(w+z) - f(z)) \frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}} = 0.$$

$\square$

1.2 Résolubilité du $\overline{\partial}$ pour une donnée à support compact ou une donnée de bidegré (p,n)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout réel $\alpha, 0 < \alpha < 1$, et pour toute fonction f: $D \to \mathbb{C}$ on définit la norme höldérienne d'ordre α de f sur D par

$$|f|_{\alpha,D} = \sup_{x\in D} |f(x)| + \sup_{\substack{x,x'\in D \\ x\neq x'}} \frac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|^\alpha}.$$

L'ensemble $\Lambda^\alpha(D) = \{f : D \to \mathbb{C} \mid |f|_{\alpha,D} < +\infty\}$ est l'espace vectoriel des fonctions höldérienne d'ordre α sur D. C'est un espace de Banach. Toute fonction f de $\Lambda^\alpha(D)$ est bornée et uniformément continue sur D. On note $\mathcal{C}^\alpha(D)$, l'espace des fonctions continues dans D telles que $|f|_{\alpha,K} < +\infty$ pour tout compact K de D et si k est un entier, $\mathcal{C}^{k+\alpha}(D)$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ dans D dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $\mathcal{C}^\alpha(D)$.

Si D est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on notera $\mathcal{C}^{k+\alpha}_{p,q}(D)$ l'espace des formes différentielles de type (p,q) dont les coefficients sont dans $\mathcal{C}^{k+\alpha}(D)$. Si $f \in \mathcal{C}^\alpha_{p,q}(D)$ s'écrit $f = \sum_{I,J} f_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$ où $I = (i_1, \dots, i_p)$, $i_1 < \dots < i_p$, et $J = (j_1, \dots, j_q)$, $j_1 < \dots < j_q$, on définit la norme höldérienne d'ordre α de f sur D par $|f|_{\alpha,D} = \sup_{I,J} |f_{I,J}|_{\alpha,D}$.

Soit B le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman défini au paragraphe 1.1 et D un domaine borné à bord de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est une forme différentielle bornée définie sur ∂D, on pose, pour $z \in D$,

$$\widetilde{B}_{\partial D} f(z) = \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge B(z, \zeta). \tag{1.4}$$

La forme différentielle $\widetilde{B}_{\partial D} f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans D.

Si f est une forme différentielle bornée définie sur D, on pose, pour $z \in D$,

$$\widetilde{B}_D f(z) = \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B(z, \zeta). \tag{1.5}$$

Puisque B a une singularité intégrable en $\zeta = z$, la forme différentielle $\widetilde{B}_D f$ est bien définie sur D.

Remarquons également que si f est de type (p, q), on a

$$\widetilde{B}_D f = \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B^p_{q-1}(\cdot, \zeta) \tag{1.6}$$

et en particulier $\widetilde{B}_D f = 0$ si $q = 0$.

Proposition 1.2.1 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$. Alors*

1) pour toute forme différentielle f bornée sur D, la forme différentielle $\widetilde{B}_D f$ est de classe $\mathcal{C}^\alpha$ dans $\overline{D}$ pour tout $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

De plus, pour tout $\alpha, 0 < \alpha < 1$, il existe une constante C_α telle que pour toute forme différentielle f bornée sur D, on ait

$$|\widetilde{B}_D f|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_\alpha |f|_{0,D}$$

2) si f est une forme différentielle bornée de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\widetilde{B}_D f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ dans D pour tout α, $0 < \alpha < 1$.

Démonstration. Par définition du noyau B (cf. formule (1.1)) il existe une constante C telle que

$$|\widetilde{B}_D f(z) - \widetilde{B}_D f(\xi)| \leq C |f|_{0,D} \sum_{j=1}^{n} \int_D \left| \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta_j - z_j|^{2n}} - \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{\xi}_j}{|\zeta - \xi|^{2n}} \right| d\sigma_{2n}$$

où σ_{2n} désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Lemme 1.2.2 *Soient $n \geq 1$, un entier et R un réel strictement positif. Il existe une constante C telle que pour tous s et $t \in \mathbb{R}^n$ tels que $|s| \leq R$ et $|t| \leq R$*

$$\int_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|x|<R}} \left|\frac{x_1-t_1}{|x-t|^n} - \frac{x_1-s_1}{|x-s|^n}\right| d\sigma_n \leq C|t-s||\log|t-s||.$$

Démonstration du lemme. Pour s et $t \in \mathbb{R}^n$ fixés tels que $|s| \leq R$ et $|t| \leq R$, considérons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
W_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-t| \leq \frac{|t-s|}{2}\right\},\\
W_2 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-s| \leq \frac{|t-s|}{2}\right\},\\
W_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R, |x-t| \geq \frac{|t-s|}{2}, |x-s| \geq \frac{|t-s|}{2}\right\},
\end{aligned}$$

alors $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\} \subset W_1 \cup W_2 \cup W_3$.

Si $x \in W_1$, remarquons que $|x-s| \geq \big||x-t| - |t-s|\big| \geq \frac{1}{2}|t-s|$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_{W_1} \left|\frac{x_1-t_1}{|x-t|^n} - \frac{x_1-s_1}{|x-s|^n}\right| d\sigma_n &\leq \int_{W_1} |x-t|^{1-n} d\sigma_n + C|t-s|^{1-n}\int_{W_1} d\sigma_n\\
&\leq C'|t-s|
\end{aligned}$$

en intégrant en coordonnées sphériques. De manière analogue on a

$$\int_{W_2} \left|\frac{x_1-t_1}{|x-t|^n} - \frac{x_1-s_1}{|x-s|^n}\right| d\sigma_n \leq C'|t-s|.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_1-t_1}{|x-t|^n} - \frac{x_1-s_1}{|x-s|^n}\right|\\
&\leq \left|\frac{(x_1-t_1)(|x-s|-|x-t|)\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}|x-s|^\nu|x-t|^{n-\nu-1} - |t_1-s_1|\ |x-t|^n}{|x-s|^n|x-t|^n}\right|\\
&\leq \big||x-s|-|x-t|\big|\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{|x-s|^\nu|x-t|^{n-\nu}}{|x-s|^n|x-t|^n}\right| + \frac{|t-s|}{|x-s|^n}\\
&\leq n|t-s|\left(\max\left\{\frac{1}{|x-s|^n}, \frac{1}{|x-t|^n}\right\} + \frac{1}{|x-s|^n}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $|t| \leq R$ et $|s| \leq R$, on a

$$\begin{aligned}\int_{W_3} \left| \frac{x_1 - t_1}{|x-t|^n} - \frac{x_1 - s_1}{|x-s|^n} \right| d\sigma_n &\leq C''|t-s| \int_{\{\frac{|t-s|}{2} \leq |y| \leq 2R\}} \frac{d\sigma_n}{|y|^n} \\ &\leq C'''|t-s| \int_{\frac{|t-s|}{2}}^{2R} \frac{dr}{r} \leq C|t-s| \big| \log|t-s| \big|.\end{aligned}$$

□

Fin de la démonstration de la proposition. Grâce au lemme on a donc

$$|\widetilde{B}_D f(z) - \widetilde{B}_D f(\xi)| \leq C|f|_{0,D}|z-\xi| \big| \log|z-\xi| \big|.$$

Comme pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a $\sup_{z,\xi \in \overline{D}} |z-\xi|^{1-\alpha} \big| \log|z-\xi| \big| < +\infty$, le résultat de *1)* est démontré.

Supposons que f est bornée dans D et de classe $\mathcal{C}^k$, fixons $z \in D$ et prouvons que $\widetilde{B}_D f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ au voisinage de z. Soit $\chi \in \mathcal{D}(D)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage U_z de z. Alors $\widetilde{B}_D(1-\chi)f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans U_z car B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$. Il suffit donc de prouver que $\widetilde{B}_D \chi f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ dans U_z. Supposons que f soit une (p,q)-forme, alors $\widetilde{B}_D \chi f(\xi) = \int_{\zeta \in D} \chi(\zeta) f(\zeta) \wedge B^p_{q-1}(\xi,\zeta)$. Posons $f(\zeta) = \displaystyle\sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{IJ}(\zeta) d\zeta_I \wedge d\overline{\zeta}_J$

$$B^p_{q-1}(\xi,\zeta) = \sum_{\substack{|K|=n-q \\ |L|=q-1 \\ |M|=n-p \\ |N|=p}} B_{KLMN} d\overline{\zeta}_K \wedge d\zeta_M \wedge d\overline{\xi}_L \wedge d\xi_N.$$

On a alors $\widetilde{B}_D \chi f(\xi) = \sum_{L,N} h_{L,N} d\overline{\xi}_L \wedge d\xi_N$ où

$$h_{L,N}(\xi) = \sum_{I,J,K,M} \int_{\zeta \in D} \chi(\zeta) f_{IJ}(\zeta) B_{KLMN}(\xi,\zeta) d\zeta_I \wedge d\overline{\zeta}_J \wedge d\overline{\zeta}_K \wedge d\zeta_M.$$

Puisque χ est à support compact dans D

$$h_{L,N}(\xi) = \sum_{I,J,K,M} \int_{\zeta \in \mathbb{C}^n} \chi(\zeta+\xi) f_{IJ}(\zeta+\xi) B_{KLMN}(\xi,\xi+\zeta) d\zeta_I \wedge d\overline{\zeta}_J \wedge d\overline{\zeta}_K \wedge d\zeta_M.$$

Comme $B = \tau^* k_{BM}$ les fonctions $B_{KLMN}(\xi,\xi+\zeta)$ sont indépendantes de ξ et localement intégrable en ζ. On peut alors dériver k fois sous le signe $\int$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui prouve que $\widetilde{B}_D\chi f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a pour $|\nu| = k$

$$\begin{aligned}
D^\nu \quad & h_{L,N}(\xi) \\
&= \sum_{I,J,K,M} \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} D^\nu(\chi f_{IJ})(\zeta+\xi) B_{KLMN}(\xi,\xi+\zeta) d\zeta_I \wedge d\overline{\zeta}_J \wedge d\overline{\zeta}_K \wedge d\zeta_M \\
&= \sum_{I,J,KM} \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} D^\nu(\chi f_{IJ})(\zeta) B_{KLMN}(\xi,\zeta) d\zeta_I \wedge d\overline{\zeta}_J \wedge d\overline{\zeta}_K \wedge d\zeta_M .
\end{aligned}$$

On déduit alors de la définition de B_{KLMN} qu'il existe une constante C telle que pour tout $\xi, \omega \in D$

$$\begin{aligned}
|D^\nu h_{LN}(\xi) - D^\nu h_{LN}(\omega)| < C \sup_{\zeta\in D} | \sum_{I,J} D^\nu(\chi f_{IJ})(\zeta)| \\
\times \sum_{j=1}^n \int_{\zeta\in D} \left| \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{\xi}_j}{|\zeta-\xi|^n} - \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{\omega}_j}{|\zeta-\omega|^n} \right| d\sigma_{2n}
\end{aligned}$$

et on conclut comme dans la preuve de *1)*. □

Théorème 1.2.3 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ et f une (p,q)-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$, $0 \le p \le n$, $0 \le q \le n$. Alors les formes différentielles $\widetilde{B}_{\partial D} f$, $\widetilde{B}_D \overline{\partial} f$, $\widetilde{B}_D f$ et $\overline{\partial}\widetilde{B}_D f$ sont continues dans D et on a*

$$(-1)^{p+q} f = \widetilde{B}_{\partial D} f - \widetilde{B}_D \overline{\partial} f + \overline{\partial}\widetilde{B}_D f \ \textit{dans } D. \tag{1.7}$$

Démonstration. La régularité des formes différentielles $\widetilde{B}_{\partial D} f$, $\widetilde{B}_D \overline{\partial} f$ et $\widetilde{B}_D f$ résulte de la Proposition 1.2.1. D'après le Théorème 1.1.5 l'égalité (1.7) est vraie au sens des courants, mais puisque les formes différentielles $\widetilde{B}_{\partial D} f, \widetilde{B}_D \overline{\partial} f$ et f sont continues, alors $\overline{\partial}\widetilde{B}_D f$ est continue. □

Corollaire 1.2.4 Formule de Bochner-Martinelli. *Soient D un domaine borné à bord $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{C}^n$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{D}$ alors*

$$\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge B_0^0(z,\zeta) - \int_{\zeta\in D} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge B_0^0(z,\zeta) = f(z) \ \textit{si } z \in D.$$

Si f est holomorphe dans D et continue dans $\overline{D}$

$$\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge B_0^0(z,\zeta) = f(z) \ \textit{si } z \in D.$$

Observons que si $n = 1$, le Corollaire 1.2.4 n'est autre que la formule de Cauchy-Green et la formule de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

Remarquons que la formule (1.7) va permettre de résoudre l'équation $\overline{\partial} u = f$ pour une (p,q)-forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 0$, $\overline{\partial}$-fermée à condition que l'intégrale $\widetilde{B}_{\partial D} f$ soit nulle.

Corollaire 1.2.5

1) Soient q un entier tel que $1 \leq q \leq n-1$ et $f \in \mathcal{C}^k_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ une (p,q)-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 0$, $\overline{\partial}$-fermée, à support compact dans $\mathbb{C}^n$. Alors il existe une $(p,q-1)$-forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, telle que $\overline{\partial} u = f$ dans $\mathbb{C}^n$.

2) Si D est un domaine borné à bord $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$, pour toute (p,n)-forme f dans $\mathcal{C}^k_{p,n}(\overline{D})$, il existe une $(p,n-1)$-forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ sur D, pour tout $\alpha \in]0,1[$, telle que $\overline{\partial} u = f$ dans D.

Démonstration. Prouvons l'assertion *1)*. Soit D un domaine borné à bord $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$ tel que D contienne le support de f. En appliquant le Théorème 1.2.3, on a alors

$$(-1)^{p+q} f(z) = \overline{\partial} \widetilde{B}_D f(z) \text{ si } z \in D$$

car $B_{\partial D} f = B_D \overline{\partial} f = 0$ puisque f est $\overline{\partial}$-fermée à support compact dans D. Posons $u(z) = \widetilde{B}_D f(z) = \int_{\zeta \in \mathbb{C}^n} f(\zeta) \wedge B^p_{q-1}(z,\zeta)$, u est une forme de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ pour tout $\alpha \in\ ]0,1[$, d'après la Proposition 1.2.1 et satisfait $\overline{\partial} u = f$ sur $\mathbb{C}^n$.

Prouvons l'assertion *2)*. Observons que $B^p_n = 0$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$ et par conséquent il résulte de la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman que

$$(-1)^{p+n} f(z) = \overline{\partial}_z \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B^p_{n-1}(z,\zeta) \text{ si } z \in D$$

cette égalité étant prise au sens des courants si f est seulement continue. Posons $u(z) = \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B^p_{n-1}(z,\zeta)$, u est la solution cherchée et $u \in \mathcal{C}^{k+\alpha}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, d'après la Proposition I.2.1. □

Exemple. Supposons que $n = q = 1$. Si D est un domaine borné à bord $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 0$, sur $\overline{D}$, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} u = f \qquad (*)$$

possède une solution u_0 de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, donnée par

$$u_0(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit d'appliquer l'assertion *2)* du Corollaire 1.2.5 à la $(0,1)$-forme différentielle $f(z)d\overline{z}$. La solution générale de l'équation $(*)$ est alors donnée par $u = u_0 + h$ où h est holomorphe dans D.

1.3 Formule de Cauchy-Fantappié

L'objet de ce paragraphe est de prouver de nouvelles formules intégrales que nous déduirons également de la formule de Stokes et qui permettront de résoudre le $\overline{\partial}$ sur des domaines de $\mathbb{C}^n$ lorsque la donnée n'est plus à support compact ou de bidegré (p,n). Les nouveaux noyaux que nous construiront prendront en compte dans un certain sens la géométrie du bord du domaine, ce qui permettra de faire disparaître le terme parasite d'intégration sur le bord du domaine.

Définition 1.3.1 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Une application $w(z,\zeta) = (w_1(z,\zeta), \dots, w_n(z,\zeta))$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in D$ et ζ dans un voisinage $U_{\partial D}$ de ∂D à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est une* section de Leray *pour D si*

$$\langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad (z,\zeta) \in D \times \partial D.$$

Exemple. L'application $w(z,\zeta) = \overline{\zeta} - \overline{z}$ est une section de Leray pour tout domaine borné D de $\mathbb{C}^n$. En effet

$$\langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle = \langle \overline{\zeta} - \overline{z}, \zeta - z\rangle = |\zeta - z|^2 \neq 0 \quad \text{si} \quad z \neq \zeta.$$

Dans toute la suite D désignera un domaine borné à bord de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$ et $w(z,\zeta)$ une section de Leray pour D. On pose alors pour $\lambda \in [0,1]$

$$\eta^w(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda)\frac{w(z,\zeta)}{\langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle} + \lambda\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2}.$$

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_{z,\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\eta_j^w(z,\zeta,\lambda)(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_1^w(z,\zeta,\lambda) \wedge \cdots \\ \wedge \widehat{(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_j^w}(z,\zeta,\lambda) \wedge \cdots \wedge (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_n^w(z,\zeta,\lambda)\end{aligned}$$

pour $z \in D$ et $K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\overline{\omega}'_{z,\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda) \wedge \omega(\zeta - z)$, si $z \in D$, $\zeta \in U_{\partial D}$ satisfont $\langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle \neq 0$. On note également

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_{z,\zeta}(w(z,\zeta)) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} w_j(z,\zeta)\overline{\partial}_{z,\zeta} w_1(z,\zeta) \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_{z,\zeta} w_j(z,\zeta)} \wedge \cdots \\ \wedge \overline{\partial}_{z,\zeta} w_n(z,\zeta)\end{aligned}$$

pour $z \in D$ et $\zeta \in U_{\partial D}$ tels que $\langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle \neq 0$.

$$K^w(z,\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\frac{\overline{\omega}'_{z,\zeta}(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta - z)}{\langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle^n}$$

Remarquons que $K^{\overline{\zeta}-\overline{z}}$ est le noyau de Bochner-Martinelli B défini au paragraphe 1. Le noyau $K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)$ est une forme différentielle continue de degré $2n-1$ sur $\{(z,\zeta,\lambda) \in D \times U_{\partial D} \times [0,1] \mid \langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle \neq 0\}$. Le noyau $K^w(z,\zeta)$ est une forme différentielle continue de bidegré $(n, n-1)$ sur $\{(z,\zeta) \in D \times U_{\partial D} \mid \langle w(z,\zeta), \zeta - z\rangle \neq 0\}$.

Lemme 1.3.2

i) On a, au sens des courants, $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda) = 0$ *si* $z \in D, \zeta \in \partial D$ *et* $\lambda \in [0,1]$,

ii) $K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\big|_{\lambda=0} = K^w(z,\zeta)$ *et* $K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\big|_{\lambda=1} = K^{\overline{\zeta}-\overline{z}}(z,\zeta) = B(z,\zeta)$.

Démonstration. Puisque la fonction $(\zeta - z)$ est holomorphe en (z,ζ) et indépendante de λ, $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\omega(\zeta - z) = 0$ et par conséquent

$$\begin{aligned}&(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\\ &= \frac{n!}{(2i\pi)^n}(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_1^w(z,\zeta,\lambda) \wedge \cdots \wedge (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_n^w(z,\zeta,\lambda) \wedge \omega(\zeta - z).\end{aligned}$$

Mais sur $D \times U_{\partial D} \times [0,1]$ on a $\langle \eta^w(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle = 1$, ce qui implique $\sum\limits_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_j^w(z,\zeta,\lambda) = 0$. On en déduit que pour $z \in D$, $\zeta \in U_{\partial D} \setminus \{z\}$ et $\lambda \in [0,1]$

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_1^w(z,\zeta,\lambda) \wedge \cdots \wedge (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\eta_n^w(z,\zeta,\lambda) = 0$$

ce qui prouve que $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda) = 0$.

L'assertion ii) se déduit des définitions des formes différentielles K^{η^w}, K^w et $B = K^{\overline{\zeta}-\overline{z}}$ et du résultat général suivant

$$\mu(\xi,\eta) = \langle \xi, \eta\rangle^{-n}\omega'(\xi) \wedge \omega(\eta) = \omega'\Big(\frac{\xi}{\langle \xi, \eta\rangle^n}\Big) \wedge \omega(\eta)$$

qui s'obtient par un calcul direct. $\square$

Théorème 1.3.3 *Soient D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ et $w(z,\zeta)$ une section de Leray pour D. On suppose que w est de classe $\mathcal{C}^2$ par* *rapport à z et que les dérivées partielles de w d'ordre inférieur ou égal à 2 par rapport à z sont continues sur $D\times U_{\partial D}$. Alors pour toute forme différentielle f continue sur $\overline{D}$, on définit l'opérateur T par*

$$Tf(z) = \left(\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda) + \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta) \right).$$

i) Si $f\in\mathcal{C}^k_{p,q}(D)\cap\mathcal{C}_{p,q}(\overline{D})$, si w est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ par rapport à z et si les dérivées partielles de w d'ordre inférieur ou égal à $k+1$ par rapport à z sont continues sur $D\times U_{\partial D}$, alors Tf est de classe $\mathcal{C}^k$ dans D.

ii) Si f est une (p,q)-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$, $0\le p,q\le n$, alors

$$(-1)^{p+q} f = \int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge K^w(\cdot,\zeta) - T\overline{\partial} f + \overline{\partial} T f \quad \textit{sur} \quad D. \tag{1.8}$$

Démonstration. Si w satisfait l'hypothèse de *i)*, le noyau $K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par rapport à z. Il résulte alors du théorème de dérivation sous le signe $\int$ que $\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D dès que f est continue sur ∂D. Par ailleurs d'après la Proposition 1.2.1, si $f\in\mathcal{C}^k_{p,q}(D)\cap\mathcal{C}_{p,q}(\overline{D})$, la forme différentielle $\widetilde{B}_D f = \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(\cdot,\zeta)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ dans D pour tout $\alpha\in]0,1[$.

Grâce à la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman, pour obtenir la formule (1.8) il suffit de prouver que pour toute forme φ de bidegré $(n-p,n-q)$ à support compact dans D

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q} &\int_{(z,\zeta,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\overline{\partial}\varphi(z) = \\ &\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z) - \int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge K^w(z,\zeta)\wedge\varphi(z) \\ &\qquad + \int_{(z,\zeta,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Appliquons la formule de Stokes sur $D\times\partial D\times[0,1]$ à la forme différentielle $f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z)$:

$$\begin{aligned}&\int_{(z,\zeta,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} (d_z+d_\zeta+d_\lambda)(f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z)) \\ &\qquad = \int_{(z,\zeta,\lambda)\in\partial(D\times\partial D\times[0,1])} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Comme φ est à support compact dans D et $\partial(D \times \partial D \times [0,1]) = \partial D \times \partial D \times [0,1] + D \times (\partial D \times \{0\} - \partial D \times \{1\})$, on déduit du Lemme 1.3.2, *ii)* que

$$\begin{aligned}
&\int_{(z,\zeta,\lambda)\in\partial(D\times\partial D\times[0,1])} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z) \\
&= \int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge K^{w}(z,\zeta)\wedge\varphi(z) - \int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\wedge\varphi(z).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Pour des raisons de bidegré

$$\begin{aligned}
(d_z + d_\zeta + d_\lambda)(f(\zeta) &\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z)) \\
&= (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\big(f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z)\big) \\
&= \overline{\partial} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z) \\
&\quad +(-1)^{p+q} f(\zeta)\wedge(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z) \\
&\quad +(-1)^{p+q+1} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\overline{\partial}\varphi(z).
\end{aligned}$$

or d'après le Lemme 1.3.2, *i)*, $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda) = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
&\int_{(z,\zeta,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} (d_z + d_\zeta + d_\lambda)\big(f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z)\big) \\
&\qquad = \int_{(z,\zeta,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\varphi(z) \qquad (1.12) \\
&\quad +(-1)^{p+q+1}\int_{(z,\zeta,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)\wedge\overline{\partial}\varphi(z).
\end{aligned}$$

La formule (1.8) se déduit de (1.10), (1.11) et (1.12). □

Corollaire 1.3.4 *Soient D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, à bord de classe $\mathcal{C}^1$ et $w(z,\zeta)$ une section de Leray pour D qui dépend holomorphiquement de z et telle que toutes ses dérivées partielles par rapport à z soient continues sur $D \times U_{\partial D}$. Alors pour toute (p,q)-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$, $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, on a*

$$f = \overline{\partial} T_q^p f + T_{q+1}^p \overline{\partial} f \quad \text{dans} \quad D \tag{1.13}$$

où $T_q^p = (-1)^{p+q} T$ et T est l'opérateur défini dans le Théorème 1.3.3.

Si $\overline{\partial} f = 0$, alors $u = T_q^p f$ est une solution continue de l'équation $\overline{\partial} u = f$ dans D. De plus cette solution u est de classe $\mathcal{C}^\alpha$ dans D pour tout $\alpha \in]0,1[$ et si f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans D, $1 \leq k \leq +\infty$, alors u est de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ dans D pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Démonstration. D'après la formule (1.8), il suffit de prouver que, sous les hypothèses du corollaire, $\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge K^w(z,\zeta) = 0$ si $z \in D$ pour obtenir la relation (1.13). Mais si $z \in D$, la partie de bidegré (p,q) en z de $\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge K^w(z,\zeta)$ est égale à $\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge (K^w)^p_q(z,\zeta)$, où $(K^w)^p_q$ est la partie de bidegré (p,q) en z de K^w. Puisque $q \geq 1$, par définition de K^w, $(K^w)^p_q = 0$, car w est holomorphe en z, *i.e.* $\overline{\partial}_z w = 0$, d'où le résultat. Si $\overline{\partial} f = 0$, (1.13) implique $f = \overline{\partial} T^p_q f$ dans D, donc $u = T^p_q f$ est solution de $\overline{\partial} u = f$ sur D. La régularité de u résulte de la Proposition 1.2.1 et du fait que w étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ en z, $\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D. $\square$

1.4 Lemme de Dolbeault

Soit D un domaine convexe à bord $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{C}^n$, il est alors facile de construire une section de Leray pour D, holomorphe en la variable z. Soit r une fonction définissante de classe $\mathcal{C}^2$ pour D, on pose, pour ζ au voisinage de ∂D, $w(z,\zeta) = \left(\frac{\partial r}{\partial\zeta_1}(\zeta),\dots,\frac{\partial r}{\partial\zeta_n}(\zeta)\right)$. L'application w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^n \times U_{\partial D}$ et indépendante de z donc en particulier holomorphe en z. Si $\zeta \in \partial D$, la condition $\langle w(z,\zeta),\zeta - z\rangle = 0$ caractérise l'espace tangent complexe $T^{\mathbb{C}}_\zeta \partial D$ à ∂D en ζ qui ne rencontre pas D car D est convexe. Par conséquent $\langle w(z,\zeta),\zeta - z\rangle \neq 0$ si $z \in D$, $\zeta \in \partial D$ et w est donc une section de Leray pour D.

On déduit alors immédiatement de cette construction et du Corollaire 1.3.4 que l'on peut résoudre l'équation $\overline{\partial} u = f$, sur un ouvert convexe, borné D à bord $\mathcal{C}^2$, lorsque f est une (p,q)-forme différentielle, $0 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$, $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{D}$. On a plus précisément le résultat suivant :

Théorème 1.4.1 *Soient D un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^2$ et r une fonction définissante de classe $\mathcal{C}^2$ pour D. Alors pour toute (p,q)-forme différentielle f continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$, $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, on a*

$$f = \overline{\partial} T^p_q f + T^p_{q+1}\overline{\partial} f \quad \textit{sur} \quad D$$

où $T^p_q f(z) = (-1)^{p+q}\Big(\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge K^{\eta^w}(z,\zeta,\lambda) + \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\Big)$ *et* $w(z,\zeta) = \left(\frac{\partial r}{\partial\zeta_1}(\zeta),\dots,\frac{\partial r}{\partial\zeta_n}(\zeta)\right)$.

En particulier, si $\overline{\partial} f = 0$, on a $f = \overline{\partial} T^p_q f$. De plus si f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans D alors $u = T^p_q f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ dans D pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Ce théorème prouve en particulier que l'on peut toujours résoudre localement le $\overline{\partial}$ avec amélioration de la régularité (il suffit de considérer des petites boules par exemple). Ce résultat s'appelle un Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}$ ou *Lemme de Dolbeault.*

Corollaire 1.4.2 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n$ un point fixé et f une (p,q)-forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^k$ sur un voisinage V de z_0, alors il existe une $(p,q-1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, sur un voisinage U de z_0 telle que $\overline{\partial}u = f$ sur U.*

Maintenant nous allons étendre la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman aux courants à support compact et nous en déduirons un résultat d'hypoellipticité höldérienne pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et le lemme de Dolbeault pour les courants.

On note toujours $B(z,\zeta)$ le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman dans $\mathbb{C}^n$. Si f est une forme différentielle continue à support compact dans $\mathbb{C}^n$ on pose pour $z \in \mathbb{C}^n$

$$\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f(z) = \int_{z\in\mathbb{C}^n} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta).$$

Lemme 1.4.3 *L'application $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}$ est linéaire continue de $\mathcal{D}_\bullet(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{C}^\infty_\bullet(\mathbb{C}^n)$. De plus si f est une (p,q)-forme différentielle, $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f$ est de bidegré $(p,q-1)$.*

Démonstration. On déduit aisément de la Proposition 1.2.1 que $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Remarquons que si f est de type (p,q), $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f(z) = \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} f(\zeta) \wedge B^p_{q-1}(z,\zeta)$ et donc $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f$ est de bidegré $(p,q-1)$.

Soit $f \in \mathcal{D}_\bullet(\mathbb{C}^n)$, nous noterons $D^{\alpha\overline{\beta}} f$ la forme différentielle obtenue en remplaçant les coefficients f_{IJ} de f par leur dérivée $D^{\alpha\overline{\beta}} f_{IJ}$. En reprenant la démonstration de la Proposition 1.2.1 de la première partie, on montre facilement que $D^{\alpha\overline{\beta}}(\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f) = \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}(D^{\alpha\overline{\beta}} f)$. Comme de plus $|\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f|_{0,\mathbb{C}^n} \leq C(\operatorname{supp} f)|f|_{0,\mathbb{C}^n}$ cela prouve la continuité de $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}$, car une suite de formes différentielles à support compact converge vers 0 dans $\mathcal{D}_\bullet(\mathbb{C}^n)$ si tous les termes de la suite sont à support dans un même compact et si elle converge uniformément vers 0 ainsi que les suites de ses dérivées. □

Si T est un courant à support compact dans $\mathbb{C}^n$ on peut définir $\widetilde{B}'T$ en posant

$$\langle \widetilde{B}'T, \varphi\rangle = \langle T, \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}\varphi\rangle = \langle T, \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} \varphi(\zeta) \wedge B(\cdot,\zeta)\rangle \tag{1.14}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_\bullet(\mathbb{C}^n)$; c'est un courant sur $\mathbb{C}^n$. Remarquons que si T est de bidegré (p,q), $\widetilde{B}'T$ est de bidegré $(p,q-1)$ et si T est d'ordre k alors $\widetilde{B}'T$ est également d'ordre k car $\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}$ opère continûment de $\mathcal{C}^k_{c,\bullet}(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{C}^k_\bullet(\mathbb{C}^n)$.

Proposition 1.4.4 *Soit f une (p,q)-forme différentielle continue à support compact dans $\mathbb{C}^n$, notons T_f le courant défini par f. Alors*

$$\widetilde{B}'T_f = (-1)^{p+q-1}\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_{n-p,n-q+1}(\mathbb{C}^n)$, par définition de $\widetilde{B}'$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{B}'T_f, \varphi\rangle &= \langle T_f, \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}\varphi\rangle \\
&= \int_{z\in\mathbb{C}^n} f(z) \wedge \Big(\int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} \varphi(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\Big) \\
&= (-1)^{p+q-1}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^n}\Big(\int_{z\in\mathbb{C}^n} f(z)\wedge B(z,\zeta)\Big)\wedge\varphi(\zeta).
\end{aligned}$$

Comme $B(z,\zeta) = B(\zeta,z)$, on obtient $\langle \widetilde{B}'T_f,\varphi\rangle = (-1)^{p+q-1}\langle \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n} f, \varphi\rangle$. □

Proposition 1.4.5 *Pour tout courant T à support compact dans $\mathbb{C}^n$, le courant $\widetilde{B}'T$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} T$. Plus précisément il existe une forme différentielle f à coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} T$ telle que*

$$\widetilde{B}'T\big|_{\mathbb{C}^n\setminus\operatorname{supp} T} = T_f.$$

Démonstration. Il suffit de trouver une telle forme f pour tout ouvert U relativement compact dans $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} T$. Fixons un tel U. Soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\chi = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{supp} T$ et $\chi = 0$ dans un voisinage de $\overline{U}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}_\bullet(U)$, par définition de $\widetilde{B}'T$ on a

$$\langle \widetilde{B}'T, \varphi\rangle = \langle T, \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} \varphi(\zeta)\wedge B(\cdot,\zeta)\rangle.$$

Comme $\chi = 0$ au voisinage de support de φ et $\chi = 1$ au voisinage du support de T on a

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{B}'T, \varphi\rangle &= \langle \chi(z)T, \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} (1-\chi)(\zeta)\varphi(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\rangle \\
&= \langle T, \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} \chi(z)(1-\chi(\zeta))\varphi(\zeta)\wedge B(z,\zeta)\rangle \\
&= (-1)^{d^o\varphi+1}\langle(\langle T, \chi(z)(1-\chi(\zeta))B(z,\zeta)\rangle), \varphi(\zeta)\rangle
\end{aligned}$$

car $\chi(z)(1-\chi(\zeta))B(z,\zeta)$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T\times\mathbb{C}^n$. Par conséquent $\widetilde{B}'T$ coïncide sur U avec la forme différentielle

$$\zeta \mapsto \langle T, \chi(z)(1-\chi(\zeta))B(z,\zeta)\rangle$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

À l'aide de l'opérateur $\widetilde{B}'$, nous pouvons prouver une formule de Bochner-Martinelli- Koppelman pour les courants à support compact.

Théorème 1.4.6 *Pour tout courant T à support compact dans $\mathbb{C}^n$, on a la formule de représentation suivante :*

$$T = -(\widetilde{B}'\overline{\partial}T + \overline{\partial}\widetilde{B}'T). \tag{1.15}$$

Démonstration. Supposons que T est de bidegré (p,q) et considérons une forme $\varphi \in \mathcal{D}_{n-p,n-q}(\mathbb{C}^n)$. D'après la formule (1.7), on a la représentation

$$(-1)^{p+q}\varphi = \overline{\partial}\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}\varphi - \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}\overline{\partial}\varphi \tag{1.16}$$

car φ est à support compact. Appliquons T aux deux membres de (1.16), on obtient alors

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q}\langle T,\varphi\rangle &= \langle T, \overline{\partial}\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}\varphi\rangle - \langle T, \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}\overline{\partial}\varphi\rangle \\ &= (-1)^{p+q-1}\big(\langle \widetilde{B}'\overline{\partial}T,\varphi\rangle + \langle\overline{\partial}\widetilde{B}'T,\varphi\rangle\big)\end{aligned}$$

d'où le théorème. $\square$

On peut alors déduire de cette formule un résultat de régularité pour l'opérateur de Cauchy-Riemann.

Théorème 1.4.7 *Soient X une variété analytique complexe et T un courant de degré 0 sur X. Si $\overline{\partial}T = T_f$, où f est une $(0,1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur X, $k = 0, 1, \ldots, \infty$, alors*

$$T = T_g, \text{ où } g \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}(X).$$

En particulier si $\overline{\partial}T = 0$ alors $T = T_h$ où h est une fonction holomorphe sur X.

Démonstration. Puisque l'assertion est locale on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Il suffit alors de prouver que pour tout ouvert $U \subset\subset X$, il existe une fonction $g \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}(U)$ telle que $T = T_g$ sur U. Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X telle que $\chi = 1$ sur un voisinage de $\overline{U}$. Appliquons la formule (1.15) à χT, on obtient

$$-\chi T = \widetilde{B}'(\overline{\partial}(\chi T)) = \widetilde{B}'(T\overline{\partial}\chi) + \widetilde{B}'(\chi T_f) \tag{1.17}$$

car T est de degré 0. Puisque $\operatorname{supp}(T\overline{\partial}\chi) \cap U = \emptyset$, il résulte de la Proposition 1.4.5 que $\widetilde{B}'(T\overline{\partial}\chi) = T_{g_1}$ où $g_1 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. De plus $\widetilde{B}'(\chi T_f)$ coïncide avec $\pm\widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}(\chi f)$ d'après la Proposition 1.4.4, et donc $\widetilde{B}'(\chi T_f) \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}(\mathbb{C}^n)$ d'après la Proposition 1.2.1. Posons $g = g_1 + \widetilde{B}'(\chi T_f)\big|_U$. On déduit alors de (1.17) que $T\big|_U = T_g$. $\square$

Remarques. 1.4.8

1) Le Théorème 1.4.7 est encore vrai lorsque T est un courant de bidegré $(p, 0)$, car une $(p, 0)$-forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée est à coefficients holomorphes donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2) La démonstration du Théorème 1.4.7 prouve également que si T est un courant à support compact de bidegré $(p, 0)$ sur X tel que $\overline{\partial}T$ soit d'ordre k alors T est d'ordre k.

Terminons ce paragraphe en prouvant le Lemme de Dolbeault pour les courants.

Théorème 1.4.9 *Soient D un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$ et T un courant de bidegré (p, q), $0 \le p \le n$, $1 \le q \le n$, $\overline{\partial}$-fermé sur D. Alors pour tout ouvert $U \subset\subset D$, il existe un courant S sur U tel que $\overline{\partial}S = T$ sur U.*

Démonstration. Soient χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{U}$ et $\operatorname{supp}\chi \subset\subset D$. Alors d'après le Théorème 1.4.6, on a la représentation

$$\chi T = -\big(\widetilde{B}'\overline{\partial}(\chi T) + \overline{\partial}\widetilde{B}'(\chi T)\big) = -\big(\widetilde{B}'(\overline{\partial}\chi \wedge T) + \overline{\partial}\widetilde{B}'(\chi T)\big)$$

car $\overline{\partial}T = 0$. Il suffit, pour conclure, de résoudre l'équation $\overline{\partial}u = \widetilde{B}'(\overline{\partial}\chi \wedge T)$ sur U. D'après la Proposition 1.3, $\widetilde{B}'(\overline{\partial}\chi \wedge T)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\overline{U}$. Sans perte de généralité on peut supposer que U est convexe à bord $\mathcal{C}^2$ et on résout $\overline{\partial}u = \widetilde{B}'(\overline{\partial}\chi \wedge T)$ sur U en appliquant le Théorème 1.4.1. $\square$

Chapitre 2

Isomorphisme de Dolbeault

Dans cette partie nous présentons quelques résultats élémentaires de théorie des faisceaux et d'algèbre homologique. En associant ces résultats au Lemme de Dolbeault nous prouvons pour finir l'isomorphisme de Dolbeault, c'est-à-dire que les groupes de cohomologie de Čech du faisceau des p-formes holomorphes, les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie à coefficients courants sont isomorphes.

2.1 Faisceaux

Définition 2.1.1 *Soit X un espace topologique. Un* préfaisceau *$\mathcal{F}$ sur X est la donnée*

i) pour chaque ouvert U de X d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$,

ii) pour chaque couple (U, V) d'ouverts de X tel que $U \subset V$ d'une application de restriction

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

telle que

1) pour tout ouvert U de X, $\rho_{UU} = I$,

2) si $U \subset V \subset W$ alors $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$. Si $s \in \mathcal{F}(V)$ on écrira souvent pour simplifier $s\big|_U$ à la place de $\rho_{UV} s$.

Si les ensembles $\mathcal{F}(U)$ sont des groupes abéliens (resp. des anneaux) et les applications ρ_{UV} des homomorphismes de groupe (resp. d'anneau), le préfaisceau $\mathcal{F}$ est un *préfaisceau de groupes abéliens* (resp. d'anneaux). Dans ce cas $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des préfaisceaux de groupes abéliens (ou d'anneaux), un *morphisme de préfaisceau* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une collection d'homomorphismes

$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ qui commutent avec les applications de restriction, *i.e.* telle que $\rho^{\mathcal{G}}_{UV} \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \rho^{\mathcal{F}}_{UV}$.

Définition 2.1.2 *Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est* un faisceau *si et seulement s'il satisfait aux axiomes de recollement :*

(R_1) *Si $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ où $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et si $\rho_{U_i U} s_1 = \rho_{U_i U} s_2$ pour tout $i \in I$ alors $s_1 = s_2$.*

(R_2) *Si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et si pour chaque $i \in I$ il existe $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ vérifiant les conditions de compatibilité*

$$\rho_{(U_i\cap U_j)U_i} s_i = \rho_{(U_i\cap U_j)U_j} s_j,$$

alors il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\rho_{U_i U} s = s_i$.

Exemples. Si X est une variété analytique complexe $\mathcal{O}$, $\mathcal{C}^{\alpha}_{p,q}$, $0 \leq \alpha \leq \infty$, $\mathcal{D}'_{p,q}$ sont des faisceaux sur X.

2.2 Cohomologie de Čech à valeur dans un faisceau $\mathcal{F}$

Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ tout élément de I^{p+1} et on pose $U_\alpha = U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$. Une *$p$-cochaîne* c du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ est une application qui à tout élément $\alpha \in I^{p+1}$ associe un élément c_α de $\mathcal{F}(U_\alpha)$ et qui est alternée comme fonction de α. L'ensemble $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ des p-cochaînes de $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ est muni d'une structure de groupe abélien déduite de celle de $\mathcal{F}$.

On définit l'opération *cobord* $\delta^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par

$$(\delta^p c)_\alpha = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_{p+1}}\big|_{U_\alpha}$$

où la notation $\hat{\alpha}_j$ signifie que l'indice α_j a été supprimé. On pose $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ et $\delta^p = 0$ pour $p < 0$. En degré 0 et 1 on obtient par exemple

$$\begin{aligned} p &= 0, \qquad c = (c_\alpha), \qquad (\delta^0 c)_{\alpha\beta} = (c_\beta - c_\alpha)\big|_{U_{\alpha\beta}} \\ p &= 1, \qquad c = (c_{\alpha\beta}), \qquad (\delta^1 c)_{\alpha\beta\gamma} = (c_{\beta\gamma} - c_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta})\big|_{U_{\alpha\beta\gamma}}. \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera aisément que $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$.

On note $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \mid \delta^p c = 0\}$ le groupe *des p-cocycles* à valeurs dans $\mathcal{F}$ et

$$E^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{\delta^{p-1} c \mid c \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\}$$

le groupe *des p cobords* à valeurs dans $\mathcal{F}$, $E^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est alors un sous-groupe de $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$. On peut alors introduire le groupe quotient

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})/E^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

on l'appelle le *p-ième groupe de cohomologie de Čech* de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{U}$. Remarquons que si c est un 0-cocycle alors $c_\alpha - c_\beta = 0$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$ pour tout α et β. Les $(c_\alpha)_{\alpha \in I}$ définissent alors un élément $s \in \mathcal{F}(X)$ tel que $s\big|_{U_\alpha} = c_\alpha$. Donc

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

Maintenant, soit $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ un autre recouvrement de X qui est plus fin que $\mathcal{U}$, c'est-à-dire tel qu'il existe une application $\rho : J \to I$ telle que $V_j \subset U_{\rho(j)}$ pour tout $j \in J$. On peut alors définir une application $\rho^\bullet$: $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})$ en posant

$$(\rho^p c)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = c_{\rho(\alpha_0)\cdots\rho(\alpha_p)}\big|_{V_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}.$$

Il est clair que cette application commute avec δ et définit donc une application $\rho^* : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Notons que l'application ρ^* est indépendante du choix de ρ. En effet, si ρ' est une autre application ayant les mêmes propriétés que ρ, les applications $\rho^\bullet$ et $\rho^{'\bullet}$ sont homotopes. Définissons l'application $h^p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p-1}(\mathcal{V},\mathcal{F})$ par

$$(h^p c)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}} = \sum_{0\le j\le p-1} (-1)^j c_{\rho(\alpha_0)\cdots\rho(\alpha_j)\rho'(\alpha_j)\cdots\rho'(\alpha_{p-1})}\big|_{V_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}}.$$

Un calcul direct et assez long donne la formule d'homotopie

$$\delta^{p-1} \circ h^p + h^{p+1}\delta^p = \rho^{'p} - \rho^p.$$

Par conséquent si c est un cocycle, on obtient $\rho^{'\bullet}c - \rho^\bullet c = \delta h^\bullet c$ est un cobord et ρ^* coïncide donc avec $\rho^{'*}$.

Considérons qu'un recouvrement de X est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, la famille de tous les recouvrements de X est alors un ensemble et nous allons pouvoir considérer la limite inductive des groupes $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ par rapport à l'application ρ^*.

Le p-ième *groupe de cohomologie de Čech* de $\mathcal{F}$ sur X, $H^p(X,\mathcal{F})$, est la limite inductive

$$H^p(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

quand $\mathcal{U}$ décrit l'ensemble des recouvrements ouverts de X. Autrement dit, cela signifie que les éléments de $H^p(X,\mathcal{F})$ sont les classes d'équivalence dans l'union disjointe des groupes $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ où un élément de $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ et un élément de $H^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ sont identifiés si leurs images coïncident dans $H^p(\mathcal{W},\mathcal{F})$ pour un recouvrement $\mathcal{W}$ de X plus fin que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Proposition 2.2.1 *Soient X une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{E}$-modules sur X, alors $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout recouvrement $\mathcal{U}$ de X. En particulier $H^p(X,\mathcal{F}) = 0$ pour $p > 0$.*

Démonstration. Soient $c \in Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Si $\alpha \in I^p$, on pose

$$c'_\alpha = \sum_{i\in I} \varphi_i c_{i\alpha}.$$

Il est clair que $c' \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, car $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{E}$-modules et si $\beta \in I^{p+1}$

$$\begin{aligned}(\delta^{p-1}c')_\beta &= \sum_{i\in I}\varphi_i\sum_{j=0}^{p}(-1)^j c_{i\beta_0\cdots\hat{\beta}_j\cdots\beta_p} = \sum_{i\in I}\varphi_i\big(c_\beta - (\delta^p c)_{i\beta_0\cdots\beta_p}\big)\\ &= \sum_{i\in I}\varphi_i c_\beta = c_\beta\end{aligned}$$

car c est un cocycle. Ce qui termine la démonstration. □

2.3 Suite exacte longue de cohomologie

Soient $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$ trois faisceaux de groupes abéliens sur X, φ et ψ des morphismes de faisceau tels que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

soit exacte, c'est-à-dire φ est injectif, ψ est surjectif et l'image de φ est égale au noyau de ψ.

Cette suite exacte définit pour chaque $p \in \mathbb{N}$ une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

mais en général la dernière application n'est pas surjective. On note $C^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H})$ l'image de $C^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ dans $C^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$. On voit facilement que δ envoie $C^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H})$ dans $C^{p+1}_{\mathcal{G}}(U,\mathcal{H})$. On a ainsi défini le complexe des cochaînes relevables et on note $H^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H})$ les groupes de cohomologie associés. On obtient alors la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet_{\mathcal{G}}(U,\mathcal{H}) \longrightarrow 0.$$

Le théorème suivant résulte alors directement du Lemme du serpent, que nous exposerons à la fin de cette annexe.

Théorème 2.3.1 *Il existe un morphisme de connexion*

$$\delta^* : H^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

et une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

où φ^* et ψ^* sont les applications naturellement induites par φ et ψ.

Si $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$ et $\rho : J \to I$ une application telle que $V_j \subset U_{\rho(j)}$ pour tout $j \in J$, on peut définir comme précédemment une application

$$\rho^* : H^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow H^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{V},\mathcal{H})$$

qui est indépendante du choix de ρ.

Théorème 2.3.2 *Si X est paracompact (c'est-à-dire si X est séparé et si tout recouvrement de X admet un recouvrement plus fin localement fini) et si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux, il existe une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

qui est la limite inductive sur les recouvrements $\mathcal{U}$ de X des suites exactes du Théorème 2.3.1.

Démonstration. Il suffit de prouver que l'application naturelle

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} H^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

est un isomorphisme. Pour cela nous allons montrer que toute cochaîne de $\mathcal{H}$ devient relevable dans $\mathcal{G}$ après avoir pris un recouvrement plus fin. $\square$

Lemme 2.3.3 *Si $c \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$, il existe un recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ plus fin que $\mathcal{U}$ et une application $\rho : J \to I$ tels que $\rho^p c \in C^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{V},\mathcal{H})$.*

Démonstration. Puisque X est paracompact, on peut supposer que $\mathcal{U}$ est localement fini. On peut choisir un recouvrement $(W_i)_{i\in I}$ tel que $\overline{W}_i \subset U_i$ pour tout i. Pour chaque $x \in X$, choisissons un voisinage ouvert V_x de x tel que

i) si $x \in W_i$, alors $V_x \subset W_i$,

ii) si $x \in U_i$ ou si $V_x \cap W_i \neq \emptyset$, alors $V_x \subset U_i$,

iii) si $x \in U_\alpha$, $\alpha \in I^{p+1}$, alors $c_\alpha \in C^p(U_\alpha,\mathcal{H})$ se relève dans $\mathcal{G}(V_x)$.

Un tel voisinage V_x existe car par définition des morphismes de faisceaux toute section de $\mathcal{H}$ se relève localement en une section de $\mathcal{G}$ et comme x n'appartient qu'à un nombre fini d'ensembles W_i (resp. U_i) on n'a besoin de relever qu'un nombre fini de sections et il n'y a qu'un nombre fini de conditions pour satisfaire i) et ii).

Choisissons $\rho : X \to I$ telle que $x \in W_{\rho(x)}$ pour tout x. La condition ii) implique alors que le recouvrement $\mathcal{V} = (V_x)_{x\in X}$ est plus fin que $\mathcal{U}$. Si $V_{x_0\cdots x_p} \neq \emptyset$, on a

$$V_{x_0} \cap W_{\rho(x_j)} \supset V_{x_0} \cap V_{x_j} \neq \emptyset \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq p$$

et donc $V_{x_0} \subset U_{\rho(x_0)\cdots\rho(x_p)}$ d'après ii). La condition iii) implique que la section $c_{\rho(x_0)\cdots\rho(x_p)}$ se relève dans $\mathcal{G}(V_{x_0})$ et en particulier dans $\mathcal{G}(V_{x_0\cdots x_p})$. Par conséquent $\rho^p c$ est relevable dans $\mathcal{G}$. $\square$

2.4 Lemme du serpent

Un complexe de groupes abéliens $(K^\bullet, d)$ est une suite

$$0 \longrightarrow K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^q \xrightarrow{d^q} K^{q+1} \longrightarrow \cdots$$

où les K^q sont des groupes abéliens et les d^q des homomorphismes de groupe tels que $d^{q+1} \circ d^q = 0$. Les groupes de cohomologie associés au complexe $(K^\bullet, d)$ sont les $H^q(K^\bullet) = \ker d^q / \operatorname{Im} d^{q-1}$.

Un morphisme φ du complexe $(K^\bullet, d)$ dans le complexe $(L^\bullet, \delta)$ est une suite $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'homomorphismes de groupes $\varphi^q : K^q \to L^q$ satisfaisant les relations de commutation

$$\varphi^{q+1} \circ d^q = \delta^q \circ \varphi^q.$$

Il en résulte que $\varphi^q(\ker d^q) \subset \ker \delta^q$ et $\varphi^q(\mathrm{Im}\, d^{q-1}) \subset \mathrm{Im}\, \delta^{q-1}$. Par conséquent φ induit, pour chaque q, un homomorphisme $\tilde{\varphi}^q : H^q(K^\bullet) \to H^q(L^\bullet)$.

Lemme 2.4.1 *Soit*

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de complexes de groupes abéliens. Il existe alors un homomorphisme de connexion

$$\vartheta^q : H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^{q+1}(K^\bullet)$$

telle que la suite longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(K^\bullet) \longrightarrow H^0(L^\bullet) \longrightarrow H^0(M^\bullet) \xrightarrow{\vartheta^0} H^1(K^\bullet) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(L^\bullet) \longrightarrow H^1(M^\bullet) \xrightarrow{\vartheta^1} H^2(K^\bullet) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

soit exacte.

De plus pour tout diagramme commutatif de suites exactes courtes de complexes de groupes abéliens.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^\bullet & \longrightarrow & L^\bullet & \longrightarrow & M^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{K}^\bullet & \longrightarrow & \widehat{L}^\bullet & \longrightarrow & \widehat{M}^\bullet & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le diagramme de suites exactes longues de cohomologie associe

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & H^q(K^\bullet) & \longrightarrow & H^q(L^\bullet) & \longrightarrow & H^q(M^\bullet) & \xrightarrow{\vartheta^q} & H^{q+1}(K^\bullet) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^q(\widehat{K}^\bullet) & \longrightarrow & H^q(\widehat{L}^\bullet) & \longrightarrow & H^q(\widehat{M}^\bullet) & \xrightarrow{\vartheta^q} & H^{q+1}(\widehat{K}^\bullet) & \longrightarrow \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Commençons par construire l'homomorphisme de connexion ϑ. Considérons le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K^q & \xrightarrow{\varphi^q} & L^q & \xrightarrow{\psi^q} & M^q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle d^q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma^q} & & \\
0 & \longrightarrow & K^{q+1} & \xrightarrow{\varphi^{q+1}} & L^{q+1} & \xrightarrow{\psi^{q+1}} & M^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle d^{q+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^{q+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma^{q+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & K^{q+2} & \xrightarrow{\varphi^{q+2}} & L^{q+2} & \xrightarrow{\psi^{q+2}} & M^{q+2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array} .
$$

Si $m \in \ker \gamma^q$ représente l'élément $\{m\}$ de $H^q(M^\bullet)$ alors $\vartheta\{m\} = \{k\} \in H^{q+1}(K)$ est la classe obtenue par la construction suivante

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \ell \in L^q & \overset{\psi^q}{\longmapsto} & m \in M^q \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma^q} \\
k \in K^{q+1} & \overset{\varphi^{q+1}}{\longmapsto} & \delta^q \ell \in L^{q+1} & \overset{\psi^{q+1}}{\longmapsto} & 0 \in M^{q+1}
\end{array}
$$

L'élément ℓ est choisi tel que $\psi^q(\ell) = m$, ce qui est possible car ψ^q est surjective. Comme $\psi^{q+1}(\delta^q \ell) = \gamma^q(m) = 0$, il existe un unique élément $k \in K^{q+1}$ tel que $\varphi^{q+1}(k) = \delta^q \ell$ à cause de l'exactitude de la ligne $q+1$. L'élément k est en fait contenu dans $\ker d^{q+1}$; puisque φ^{q+2} est injective, il suffit de montrer que $\varphi^{q+2}(d^{q+1}k) = 0$, or

$$\varphi^{q+2}(d^{q+1}k) = \delta^{q+1}(\varphi^{q+1}k) = \delta^{q+1}(\delta^q \ell) = 0$$

Si ℓ' est un élément tel que $\psi^q(\ell') = m$, alors $\ell' = \ell + \varphi^q(h)$, $\delta^q \ell' = \delta^q \ell + \delta^q \varphi^q(h) = \delta^q \ell + \varphi^{q+1}(d^q h)$ et $\delta^q \ell' = \varphi^{q+1}(k')$ avec $k' = k + d^q h$, autrement dit on a défini un homomorphisme de groupe de $\ker \gamma^q$dans $H^{q+1}(K^\bullet) = \ker d^{q+1} / \operatorname{Im} d^q$.

Si $m = \gamma^{q-1}\mu$ et si $\psi^{q-1}(\lambda) = \mu$, on peut prendre $\ell = \delta^{q-1}(\lambda)$; $\delta^q(\ell) = 0$ et donc $k = 0$. On obtient donc

$$\vartheta^q : H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^{q+1}(K^\bullet).$$

Montrons l'exactitude de la suite longue de cohomologie. Prouvons tout d'abord que $\ker \vartheta^q = \operatorname{Im} \tilde{\psi}^q$. Si $\{m\} \in \operatorname{Im} \tilde{\psi}^q$, on peut choisir m tel que $m = \psi^q(\ell)$ avec $\delta^q \ell = 0$, il résulte alors de la définition de ϑ^q que $\vartheta^q\{m\} = 0$. Réciproquement si $\vartheta^q\{m\} = \{k\} = 0$, cela signifie que $k = d^q \kappa$ donc $\delta^q \ell = \varphi^{q+1}(k) = \varphi^{q+1}(d^q \kappa) = \delta^q(\varphi^q(\kappa))$. Alors $\ell - \varphi^q(\kappa) \in \ker \delta^q$ et $m = \psi^q(\ell - \varphi^q(\kappa))$ donc $\{m\} \in \operatorname{Im} \tilde{\psi}^q$.

Montrons maintenant que $\operatorname{Im} \vartheta^q = \ker \tilde{\varphi}^{q+1}$. Soit $\{k\}$ un élément de $\ker \tilde{\varphi}^{q+1}$ alors $\varphi^{q+1}(k) \in \operatorname{Im} \delta^q$, il existe donc ℓ tel que $\varphi^{q+1}(k) = \delta^q \ell$. Si $m = \psi^q(\ell)$ on a, par définition de ϑ^q, $\{k\} = \vartheta^q\{m\}$. L'inclusion inverse est immédiate par définition de ϑ^q.

La démonstration de l'égalité $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}^q = \ker \tilde{\psi}^q$ ainsi que la commutativité du dernier diagramme sont laissées au lecteur. $\square$

2.5 Isomorphisme de Dolbeault

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. On note Ω^p le faisceau des germes de p-formes holomorphes sur X et $H^q(X, \Omega^p)$ les groupes de cohomologie de Čech de Ω^p sur X.

On désigne par $Z^\alpha_{p,q}(X)$, $0 \leq \alpha \leq \infty$, le sous-espace des formes différentielles $f \in \mathcal{C}^\alpha_{p,q}(X)$ telles que $\overline{\partial} f = 0$ et par $E^\alpha_{p,q}(X)$ le sous-espace des formes différentielles $f \in Z^\alpha_{p,q}(X)$ telles que $f = \overline{\partial} g$ où $g \in \mathcal{C}^\alpha_{p,q-1}(X)$. On pose $H^{p,q}_\alpha(X) = Z^\alpha_{p,q}(X)/E^\alpha_{p,q}(X)$. Les groupes $H^{p,q}_\infty(X)$ s'appellent les *groupes de cohomologie de Dolbeault* de la variété X. Pour terminer si $Z^{\text{cour}}_{p,q}(X)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$ des courants $\overline{\partial}$-fermés et $E^{\text{cour}}_{p,q}(X)$ le sous-espace de $Z^{\text{cour}}_{p,q}(X)$ des courants $\overline{\partial}$-exacts, on pose

$$H^{p,q}_{\text{cour}}(X) = Z^{\text{cour}}_{p,q}(X)/E^{\text{cour}}_{p,q}(X).$$

On note Φ l'application $Z^\alpha_{p,q}(X) \to Z^{\text{cour}}_{p,q}(X)$ qui a une forme f associe le courant T_f défini par f.

Théorème 2.5.1 *Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Alors*

$$H^q(X, \Omega^p) = 0 \quad si \quad p \geq n+1 \quad ou \quad q \geq n+1 \tag{2.1}$$

et pour tout couple (p,q), $0 \leq p, q \leq n$, il existe des isomorphismes

$$\delta^{p,q}_\alpha : H^{p,q}_\alpha(X) \longrightarrow H^q(X, \Omega^p), \quad 0 \leq \alpha \leq \infty \tag{2.2}$$

$$\delta^{p,q}_{\text{cour}} : H^{p,q}_{\text{cour}}(X) \longrightarrow H^q(X, \Omega^p) \tag{2.3}$$

tels que, pour tout $\alpha \in [0, +\infty]$, le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
H^{p,q}_{\alpha}(X) \arrow[dr, "\delta^{p,q}_{\alpha}"] \arrow[dd, "\Phi^*"'] & \\
& H^q(X, \Omega^p) \\
H^{p,q}_{\text{cour}}(X) \arrow[ur, "\delta^{p,q}_{\text{cour}}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.4}
$$

soit commutatif. En particulier, pour $0 \leq \alpha \leq \infty$ et $0 \leq p, q \leq n$, l'homomorphisme

$$\Phi^* : H^{p,q}_{\alpha}(X) \longrightarrow H^{p,q}_{\text{cour}}(X) \tag{2.5}$$

induit par Φ est un isomorphisme.

Démonstration. On considère les faisceaux $Z^{\alpha}_{p,q}$ des formes différentielles $\overline{\partial}$-fermées de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ sur X, $\mathcal{D}'_{p,q}$ des courants sur X, $Z^{\text{cour}}_{p,q}$ des courants $\overline{\partial}$-fermés sur X et $\widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,q}$ des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ dont le $\overline{\partial}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ (*i.e.* si $U \subset X$ est un ouvert, $\widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,q}(U) = \{f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{p,q}(U) \mid \overline{\partial} f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{p,q+1}(U)\}$.).

Remarquons que les faisceaux $\widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,q}$ et $\mathcal{D}'_{p,q}$ sont des faisceaux de $\mathcal{E}$-module, où $\mathcal{E}$ désigne le faisceau des germes de fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ sur X. Par conséquent, d'après la Proposition 2.2.1,

$$H^r(X, \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,q}) = 0 \quad \text{si} \quad r \geq 1 \tag{2.6}$$

et

$$H^r(X, \mathcal{D}'_{p,q}) = 0 \quad \text{si} \quad r \geq 1. \tag{2.7}$$

Il résulte de la régularité du $\overline{\partial}$ (chap. 1, Théorème 1.4.7 et remarque 1.4.8) que l'application

$$\Phi : \Omega^p(X) \longrightarrow Z^{\text{cour}}_{p,0}(X)$$

est un isomorphisme et, si $0 \leq \alpha \leq \infty$, $\Omega^p(X) = Z^{\alpha}_{p,0}(X)$. Le théorème est donc vrai pour $q = 0$.

Supposons $q \geq 1$. Grâce au Lemme de Dolbeault pour les formes différentielles (Chap. 1, Corollaire 1.4.2), pour tout $s = 1, \ldots, n$ la suite

$$0 \longrightarrow Z^{\alpha}_{p,s-1} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,s-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} Z^{\alpha}_{p,s} \longrightarrow 0$$

est exacte. Considérons la suite exacte longue de cohomologie associée à cette suite (Théorème 2.3.2)

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow Z^{\alpha}_{p,s-1}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,s-1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} Z^{\alpha}_{p,s}(X) \xrightarrow{\delta^0_{\alpha,(p,s)}} \\
H^1(X, Z^{\alpha}_{p,s-1}) \longrightarrow H^1(X, \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,s-1}) \xrightarrow{\overline{\partial}} H^1(X, Z^{\alpha}_{p,s}) \xrightarrow{\delta^1_{\alpha,(p,s)}} \quad \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
H^r(X, Z^{\alpha}_{p,s-1}) \longrightarrow H^r(X, \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,s-1}) \xrightarrow{\overline{\partial}} H^r(X, Z^{\alpha}_{p,s}) \xrightarrow{\delta^{r+1}_{\alpha,(p,s)}} \quad \cdots\cdots
\end{array}$$

Il résulte de (2.6) que les morphismes de connexion

$$\delta^r_{\alpha,(p,s)} : H^r(X, Z^{\alpha}_{p,s}) \longrightarrow H^{r+1}(X, Z^{\alpha}_{p,s-1}) \tag{2.8}$$

sont des isomorphismes si $r \geq 1$ et que le morphisme de connexion $\delta^0_{\alpha,(p,s)}$ induit un isomorphisme

$$\widehat{\delta}^0_{\alpha,(p,s)} : H^{p,s}_{\alpha}(X) \longrightarrow H^1(X, Z^{\alpha}_{p,s-1}), \quad 1 \leq s \leq n. \tag{2.9}$$

Si $q \geq n+1$, les isomorphismes (2.8) pour $r \geq 1$, impliquent que

$$H^q(X, Z^{\alpha}_{p,0}) \simeq H^{q-n}(X, Z^{\alpha}_{p,n}).$$

Puisque $Z^{\alpha}_{p,n} = \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,n}$ et $Z^{\alpha}_{p,0} = \Omega^p$ on a donc

$$H^q(X, \Omega^p) \simeq H^{q-n}(X, \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,n}) \quad \text{si} \quad q \geq n+1$$

et d'après (2.6) cela prouve (2.1).

Supposons $1 \leq q \leq n$ et posons

$$\delta^{p,q}_{\alpha} = \delta^{q-1}_{\alpha,(p,1)} \circ \cdots \circ \delta^1_{\alpha,(p,q-1)} \circ \widehat{\delta}^0_{\alpha,(p,q)}.$$

Puisque les applications (2.9) et (2.8) sont des isomorphismes pour $r \geq 1$ et $Z^{\alpha}_{p,0} = \Omega^p$, on obtient un isomorphisme

$$\delta^{p,q}_{\alpha} : H^{p,q}_{\alpha}(X) \longrightarrow H^q(X, \Omega^p).$$

Le Lemme de Dolbeault pour les courants (Chap. 1, Théorème 1.4.9 nous donne les suites exactes

$$0 \longrightarrow Z^{\text{cour}}_{p,s-1} \longrightarrow \mathcal{D}'_{p,s-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} Z^{\text{cour}}_{p,s} \longrightarrow 0 \quad 1 \leq s \leq n.$$

Grâce à la régularité du $\overline{\partial}$, c'est-à-dire l'isomorphisme entre $\Omega^p(X)$ et $Z^{\text{cour}}_{p,0}(X)$ (Chap. 1, Théorème 1.4.7 et remarque 1.4.8), et à la relation (2.7) on peut itérer la démonstration ci-dessus et on obtient un isomorphisme

$$\delta^{p,q}_{\text{cour}} : H^{p,q}_{\text{cour}}(X) \longrightarrow H^q(X, \Omega^p).$$

De plus on a le diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z^{\alpha}_{p,s-1} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}}^{\alpha}_{p,s-1} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & Z^{\alpha}_{p,s} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \\
0 & \longrightarrow & Z^{\text{cour}}_{p,s-1} & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{p,s-1} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & Z^{\text{cour}}_{p,s} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

D'après la seconde assertion du Lemme du serpent (Lemme 2.4.1) chacun des diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
H^r(X, Z^{\alpha}_{p,s}) & \xrightarrow{\delta^r_{\alpha,(p,s)}} & H^{r+1}(X, Z^{\alpha}_{p,s-1}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*} \\
H^r(X, Z^{\text{cour}}_{p,s}) & \xrightarrow{\delta^r_{\text{cour},(p,s)}} & H^{r+1}(X, Z^{\text{cour}}_{p,s-1})
\end{array} \qquad r \geq 0, 1 \leq s \leq n$$

est commutatif et par conséquent par définition de $\delta^{p,q}_{\alpha}$ et $\delta^{p,q}_{\text{cour}}$ le diagramme (2.4) est commutatif. □

Les isomorphismes du diagramme (2.4) sont appelés *isomorphismes de Dolbeault.*

Remarques.

On déduit du Théorème 2.5.1, les résultats suivants :

i) Si f est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq \infty$, et s'il existe un courant T tel que $\overline{\partial}T = T_f$ alors il existe une forme différentielle g de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ telle que $\overline{\partial}g = f$ (c'est l'injectivité de (2.5)).

ii) Pour tout courant T, $\overline{\partial}$-fermé il existe un courant S tel que $T - \overline{\partial}S$ soit une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ (c'est la surjectivité de (2.5) pour $\alpha = \infty$).

On a plus précisément le corollaire :

Corollaire 2.5.2 *Soit X une variété analytique complexe.*

i) Pour tout courant T, $\overline{\partial}$-fermé sur X et tout voisinage U du support de T, il existe un courant S sur X telle que $T - \overline{\partial}S$ soit une forme $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et $\operatorname{supp} S \subset U$.

ii) Si f est une forme de classe $\mathcal{C}^k$ sur X, $k = 0,1,\dots,\infty$ et T un courant sur X tels que $\overline{\partial}T = T_f$, alors pour tout voisinage U du support de T, il existe une forme différentielle $g \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}(X,E)$ telle que $\overline{\partial}g = f$ sur X et $\operatorname{supp} g \subset U$.

Démonstration. Prouvons *i)*. Choisissons un voisinage V du support de T tel que $\overline{V} \subset U$ et soient χ_0 et χ_1 des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X telles que $\chi_0 = 1$ sur un voisinage de $X \setminus V$ et $\chi_0 = 0$ au voisinage du support de T, $\chi_1 = 1$ au voisinage de $X \setminus U$ et $\chi_1 = 0$ sur un voisinage de $\overline{V}$.

Puisque T est $\overline{\partial}$-fermé et que le morphisme (5.5) est surjectif, il existe un courant S_0 sur X et une forme différentielle f_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}$-fermée sur X tels que $T - \overline{\partial}S_0 = T_{f_0}$ sur X. Alors $T_{f_0} = -\overline{\partial}S_0$ sur $X \setminus \operatorname{supp} T$ et comme le morphisme (5.5) est injectif, il existe une forme $\mathcal{C}^\infty$, g_0, sur $X \setminus \operatorname{supp} T$ telle que $f_0 = \overline{\partial}g_0$ sur $X \setminus \operatorname{supp} T$. Sur $X \setminus \overline{V}$ on a alors $\overline{\partial}(S_0 + T_{\chi_0 g_0}) = T_{-f_0 + \overline{\partial}g_0} = 0$. La surjectivité du morphisme (5.5) implique alors l'existence d'un courant R sur $X \setminus \overline{V}$ et d'une forme différentielle g_1 de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}$-fermée tels que $S_0 + T_{\chi_0 g_0} - \overline{\partial}R = T_{g_1}$ sur $X \setminus \overline{V}$. Le courant $S = S_0 + T_{\chi_0 g_0 - \chi_1 g_1} - \overline{\partial}(\chi_1 R)$ satisfait l'assertion *i)*.

Maintenant montrons *ii)*. Notons $\mathcal{F}$ le faisceau sur X défini de la manière suivante : si V est un ouvert de X, $\mathcal{F}(V)$ est l'espace vectoriel des formes différentielles $g \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}_\bullet(V)$ telles que $\overline{\partial}g \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}_\bullet(V)$. C'est un faisceau de $\mathcal{E}$-modules et par conséquent d'après la Proposition 2.2.1,

$$H^1(X,\mathcal{F}) = 0. \tag{2.10}$$

Soient $V = (V_i)_{i\in I}$ et $W = (W_i)_{i\in I}$ des recouvrements ouverts de X tels que, pour tout i, $V_i \subset\subset W_i$, V_i et W_i sont biholomorphes à la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^k_\bullet(X)$, $\overline{\partial}$-fermée, d'après le Lemme de Dolbeault pour les formes (Chap. 1, Corollaire 1.4.2), on peut trouver une famille de formes $g_i \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}_\bullet(W_i)$ telles que $\overline{\partial}g_i = f$ sur W_i. Si T est un courant sur X tel que $\overline{\partial}T = T_f$, l'injectivité du morphisme (2.5) implique qu'il existe une forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^k$ sur X telle que $\overline{\partial}u = f$ sur X. Posons $h_i = g_i - u$ sur V, alors $h_i \in Z^k_\bullet(W_i)$. Si f est de degré 1, h_i est holomorphe et $u \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}(X)$. Sinon en appliquant à nouveau le Lemme de Dolbeault on obtient une famille de formes $k_i \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}_\bullet(V_i)$ telles que $\overline{\partial}k_i = h_i$ sur V_i. Il en résulte que $k_i - k_j \in \mathcal{F}(V_i \cap V_j)$ et grâce à (2.10) il existe une famille de formes $w_i \in \mathcal{F}(V_i)$ telles que $k_i - k_j = w_i - w_j$ sur $V_i \cap V_j$. En posant $v = g_i - \overline{\partial}w_i$ sur V_i, on obtient une forme $v \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}(X)$ telle que $\overline{\partial} v = f$ sur X.

Nous venons de construire une solution ayant la régularité cherchée, il reste à satisfaire la condition de support. Puisque $\overline{\partial} v = f$ sur X, le courant $T - T_v$ est $\overline{\partial}$-fermé sur X et la surjectivité du morphisme (2.5) pour $\alpha = \infty$ implique qu'il existe un courant S sur X et une forme différentielle g_∞ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}$-fermé sur X tels que $T - T_v + \overline{\partial} S = T_{g_\infty}$. On a alors $\overline{\partial} S = T_{v+g_\infty}$ sur $X \setminus \operatorname{supp} T$. Grâce à la 1ère partie de la démonstration il existe donc une forme différentielle $h \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{k+\alpha}_{\bullet}\ (X \setminus \operatorname{supp} T)$ telle que $\overline{\partial} h = v + g_\infty$ sur $X \setminus \operatorname{supp} T$. Choisissons une fonction χ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X telle que $\chi = 0$ au voisinage du support de T et $\chi = 1$ dans un voisinage de $X \setminus U$. Alors la forme différentielle $g = v + g_\infty - \overline{\partial}(\chi h)$ satisfait l'assertion *ii)*. $\square$

Chapitre 3

Dualité de Serre

Si X est une variété analytique complexe de dimension n et Ω_X^p le faisceau des p-formes holomorphes sur X, $0 \leq p \leq n$, on peut considérer d'une part la résolution de Ω_X^p par le complexe de Dolbeault $(\mathcal{E}^{p,*}, \overline{\partial})$ des (p,q)-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'autre part la résolution de Ω_X^p par le complexe de Dolbeault $(\mathcal{D}'^{p,*}_X, \overline{\partial})$ des (p,q)-courants. Si on note respectivement $H^{p,q}_\infty(X)$ et $H^{p,q}_{\text{cour}}(X)$ les groupes de cohomologie des complexes $(\mathcal{E}^{p,*}(X), \overline{\partial})$ et $(\mathcal{D}'^{p,*}(X), \overline{\partial})$, on a vu au chapitre II que l'application naturelle

$$H^{p,q}_\infty(X) \longrightarrow H^{p,q}_{\text{cour}}(X) \tag{3.1}$$

est un isomorphisme, appelé isomorphisme de Dolbeault. On peut également considérer sur X le complexe de Dolbeault $(\mathcal{D}^{p,*}(X), \overline{\partial})$ des (p,q)-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X et $H^{p,q}_{c,\infty}(X)$ les groupes de cohomologie associés. Il existe alors des relations naturelles de dualité entre les groupes $H^{p,q}_\infty(X)$ et $H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X)$, $0 \leq q \leq n$, si on munit ces groupes de la topologie quotient issue respectivement de la topologie usuelle de $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{D}(X)$. Plus précisément, il résulte du travail de Serre [8] et des travaux de Andreotti et Kaas [1] et de Laufer [4] que si le groupe $H^{p,q}_\infty(X)$ est séparé alors le morphisme naturel de $H^{p,q}_\infty(X)$ dans $\big(H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X)\big)'$ est un isomorphisme et si le groupe $H^{p,q}_{c,\infty}(X)$ est séparé alors le morphisme naturel de $H^{p,q}_{c,\infty}(X)$ dans $\big(H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X)\big)'$ est un isomorphisme. De plus $H^{p,q}_\infty(X)$ est séparé si, et seulement si, $H^{n-p,n-q+1}_{c,\infty}(X)$ est séparé. Ces résultats reposent fortement sur l'isomorphisme (3.1) et l'isomorphisme correspondant pour la cohomologie à support compact.

3.1 Préliminaires

Soient X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X, E^* son fibré dual et $\overline{\partial}$ l'opérateur de Cauchy-

Riemann sur X. On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
Z^{\infty}_{p,q}(X,E) &= \mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(X,E) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}, \\
E^{\infty}_{p,q}(X,E) &= \mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(X,E) \cap \overline{\partial}\mathcal{C}^{\infty}_{p,q-1}(X,E) \\
Z^{\infty}_{p,q}(c;X,E) &= \mathcal{D}^{p,q}(X,E) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}, \\
E^{\infty}_{p,q}(c;X,E) &= \mathcal{D}^{p,q}(X,E) \cap \overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q-1}(X,E) \\
Z^{\mathrm{cour}}_{p,q}(X,E^*) &= \mathcal{D}'^{p,q}(X,E^*) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}, \\
E^{\mathrm{cour}}_{p,q}(X,E^*) &= \mathcal{D}'^{p,q}(X,E^*) \cap \overline{\partial}\mathcal{D}'^{p,q-1}(X,E^*) \\
Z^{\mathrm{cour}}_{p,q}(c;X,E^*) &= \mathcal{E}'^{p,q}(X,E^*) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}, \\
E^{\mathrm{cour}}_{p,q}(c;X,E^*) &= \mathcal{E}'^{p,q}(X,E^*) \cap \overline{\partial}\mathcal{E}'^{p,q-1}(X,E^*)
\end{aligned}$$

Les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie seront notés

$$\begin{aligned}
H^{p,q}_{\infty}(X,E) &= Z^{\infty}_{p,q}(X,E)/E^{\infty}_{p,q}(X,E), \\
H^{p,q}_{c,\infty}(X,E) &= Z^{\infty}_{p,q}(c;X,E)/E^{\infty}_{p,q}(c;X,E), \\
H^{p,q}_{\mathrm{cour}}(X,E^*) &= Z^{\mathrm{cour}}_{p,q}(X,E^*)/E^{\mathrm{cour}}_{p,q}(X,E^*), \\
H^{p,q}_{c,\mathrm{cour}}(X,E^*) &= Z^{\mathrm{cour}}_{p,q}(c;X,E^*)/E^{\mathrm{cour}}_{p,q}(c;X,E^*).
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq p \leq n$ et $0 \leq q \leq n-k$, on notera

$$\phi^{p,q}_X : H^{p,q}_{\infty}(X,E) \longrightarrow H^{p,q}_{\mathrm{cour}}(X,E)$$

et

$$\phi^{p,q}_{c,X} : H^{p,q}_{c,\infty}(X,E) \longrightarrow H^{p,q}_{c,\mathrm{cour}}(X,E)$$

les applications naturelles entre les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie à coefficients $\mathcal{C}^{\infty}$ et les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie à coefficients courants. Grâce aux résultats du chapitre II légèrement adaptés, ce sont des isomorphismes.

3.2 Dualité de Serre

L'objet de ce paragraphe est d'établir une théorie de la dualité entre les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie.

Si F est un espace vectoriel topologique, on note ${}^{\sigma}F$ l'espace séparé associé, c'est-à-dire le quotient de F par l'adhérence du sous espace vectoriel réduit à 0.

Théorème 3.2.1 *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X et p et q des entiers tels que $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$. Alors les morphismes naturels*

$$^{\sigma}H^{p,q}_{\infty}(X,E) \longrightarrow \big(H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X,E^*)\big)'$$

$$^{\sigma}H^{p,q}_{c,\infty}(X,E) \longrightarrow \big(H^{n-p,n-q}_{\infty}(X,E^*)\big)'$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Définissons et étudions le premier morphisme. Si $[f] \in {}^{\sigma}H^{p,q}_{\infty}(X,E)$, on définit $L_{[f]}$ par $L_{[f]}(\varphi) = \int_X f \wedge \varphi$ pour toute $\varphi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q}(c;X,E^*)$. Notons que si g est un autre représentant de $[f]$, la formule de Stokes et la continuité de l'application $h \mapsto \int_X h \wedge \varphi$ sur $\mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(X,E)$ impliquent que $\int_X f \wedge \varphi = \int_X g \wedge \varphi$ Par ailleurs il résulte également de la formule de Stokes que $L_{[f]}(\varphi)$ ne dépend que de la classe de φ dans $H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X,E^*)$ et par conséquent $L_{[f]}$ définit une forme linéaire sur $H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X,E^*)$; de plus cette forme est clairement continue. Nous obtenons donc ainsi un morphisme naturel

$$\tau \ : \ {}^{\sigma}H^{p,q}_{\infty}(X,E) \longrightarrow \big(H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X,E^*)\big)'.$$

Étudions l'injectivité de ce morphisme. Soit $[f] \in {}^{\sigma}H^{p,q}_{\infty}(X,E)$ telle que $L_{[f]} = 0$, montrons que $[f] = 0$. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $[f] \neq 0$, *i.e.* $f \notin \overline{E^{\infty}_{p,q}}(X,E)$. D'après le théorème de Hahn-Banach il existe donc un $(n-p,n-q)$-courant S à support compact tel que $S|_{E^{\infty}_{p,q}(X,E)} = 0$ et $S(f) \neq 0$. Le courant S est alors $\overline{\partial}$-fermé et grâce à la surjectivité de $\phi^{n-p,n-q}_{c,X}$, il existe une forme $\varphi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q}(c;X,E^*)$ et un $(n-p,n-q-1)$-courant T à support compact tels que $S = \varphi + \overline{\partial}T$. On obtient donc

$$S(f) = \int_X f \wedge \varphi + \langle \overline{\partial}T, f\rangle = \int_X f \wedge \varphi$$

et par conséquent $L_{[f]}(\varphi) \neq 0$, d'où la contradiction.

Terminons en prouvant la surjectivité de τ. Soit L une forme linéaire continue sur $H^{n-p,n-q}_{c,\infty}(X,E^*)$, elle définit naturellement une forme linéaire continue sur $Z^{\infty}_{n-p,n-q}(c;X,E^*)$ et par le théorème de Hahn-Banach elle s'étend en un (p,q)-courant T sur X qui vérifie $T|_{E^{\infty}_{n-p,n-q}(c,X,E)} = 0$, *i.e.* $\overline{\partial}T = 0$. La surjectivité de $\phi^{p,q}_X$ donne alors l'existence de $f \in Z^{\infty}_{p,q}(X,E)$ et d'un (p,q)-courant S sur X tels que $T = f + \overline{\partial}S$. Il est alors clair que $L = L_{[f]}$.

L'étude du second morphisme est tout à fait analogue. □

Théorème 3.2.2 *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X et p et q des entiers tels que $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $E^{\infty}_{p,q+1}(c; X, E) = \Big\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(X, E) \mid \int_X f \wedge \varphi = 0,$ $\forall \varphi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q-1}(X, E^*) \Big\}$ *;*

(ii) $H^{p,q+1}_{c,\infty}(X, E)$ *est séparé ;*

(iii) $E^{\infty}_{n-p,n-q}(X, E^*) = \Big\{ \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_{n-p,n-q}(X, E^*) \mid \int_X \varphi \wedge f = 0,$ $\forall f \in Z^{\infty}_{p,q}(c; X, E) \Big\}$ *;*

(iv) $H^{n-p,n-q}_{\infty}(X, E^*)$ *est séparé .*

De plus, si ces assertions sont satisfaites, les morphismes naturels

$$H^{p,q+1}_{c,\infty}(X, E^*) \longrightarrow \big(H^{n-p,n-q-1}_{\infty}(X, E)\big)'$$

$$H^{n-p,n-q}_{\infty}(X, E) \longrightarrow \big(H^{p,q}_{c,\infty}(X, E^*)\big)'$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Il est clair que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* et *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*. Il reste à prouver que *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* et *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)*.

Prouvons l'implication *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)*. L'inclusion

$$E^{\infty}_{p,q+1}(c; X, E) \subset \Big\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(X, E) \,|\, \int_X f \wedge \varphi = 0,\ \ \forall \varphi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q-1}(X, E^*) \Big\}$$

résulte de la formule de Stokes. En effet, si $f \in E^{\infty}_{p,q+1}(c; X, E)$, il existe $g \in \mathcal{D}^{p,q}(X, E)$ telle que $\overline{\partial} g = f$ et pour toute $\varphi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q-1}(X, E^*)$ par le théorème de Stokes on a

$$\int_X f \wedge \varphi = \int_X \overline{\partial} g \wedge \varphi = \int_X d(g \wedge \varphi) = 0.$$

Considérons l'inclusion inverse. Soit $f \in \mathcal{D}^{p,q+1}(X, E^*)$ vérifiant $\int_X f \wedge \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q-1}(X, E)$. On définit une forme linéaire L_f sur $E^{\infty}_{n-p,n-q}(X, E)$ en posant

$$L_f(\beta) = \int_X f \wedge \alpha \ \text{ si } \ \beta = \overline{\partial} \alpha.$$

D'après la condition d'orthogonalité sur f, la forme L_f est bien définie. L'opérateur $\overline{\partial}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q-1}(X,E)$ dans $E^\infty_{n-p,n-q}(X,E)$, qui est un espace de Fréchet d'après l'hypothèse *(iv)*. Par conséquent grâce au théorème de l'application ouverte, L_f est continue ; on peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach et étendre L_f en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q}(X,E)$. Cette extension définit un courant S à support compact sur X tel que

$$\langle S, \overline{\partial}\alpha\rangle = \int_X f\wedge\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha\in\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q-1}(X,E)$$

ce qui implique $\overline{\partial}S = \pm f$ sur X. L'injectivité de l'application $\phi^{p,q+1}_{c,X}$ donne alors l'existence de ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur X telle que $\overline{\partial}\psi = f$ sur X.

L'implication *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* est une conséquence des lemmes suivants :

Lemme 3.2.3 *Soit X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X et p et q des entiers tels que $0\leq p\leq n$, $0\leq q\leq n$. On considère les assertions suivantes :*

(ii) $H^{p,q+1}_{c,\infty}(X,E)$ *est séparé ;*

(ii)' Pour tout compact K de X, $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap E^\infty_{p,q+1}(c,X,E)$ est fermé dans

$\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)$ *;*

(ii)" Pour tout compact K de X, il existe un compact $\widetilde{K}$ dans X tel que

$$\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap E^\infty_{p,q+1}(c;X,E) = \mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q+1}_{\widetilde{K}}(X,E)$$

alors (ii) $\Rightarrow$ (ii)' $\Rightarrow$ (ii)".

Démonstration. L'assertion *(ii)* signifie que $E^\infty_{p,q+1}(c;X,E)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{p,q+1}(X,E)$ ce qui implique *(ii)'* par définition de la topologie limite inductive sur $\mathcal{D}^{p,q+1}(X,E)$.

Supposons maintenant que *(ii)'* est satisfaite. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de X, alors pour un compact K fixé dans X, on a

$$\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap E^\infty_{p,q+1}(c;X,E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{K_n}(X,E)\ .$$

Grâce à *(ii)'*, $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap E^\infty_{p,q+1}(c;X,E)$ est un espace de Fréchet, il existe donc n_0 tel que l'espace $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)\cap\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{K_{n_0}}(X,E)$ soit de seconde catégorie de Baire. L'opérateur $\overline{\partial}$ est alors un opérateur fermé de domaine de

définition $\{\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}_{K_{n_0}}(X,E) \mid \overline{\partial}\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}_K(X,E)\}$ entre les espaces de Fréchet $\mathcal{D}^{p,q}_{K_{n_0}}(X,E)$ et $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E) \cap E^{\infty}_{p,q+1}(c;X,E)$ dont l'image est de seconde catégorie de Baire ; le théorème de l'application ouverte implique alors que cet opérateur est surjectif et ouvert. On obtient alors *(ii)"* en posant $\widetilde{K} = K_{n_0}$.
$\square$

Lemme 3.2.4 *Soit X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X et p et q des entiers tels que $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$.*

Si pour un compact K fixé de X, l'assertion

(ii)'$_K$ $\quad \mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E) \cap E^{\infty}_{p,q+1}(c;X,E)$ *est fermé dans* $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)$

est satisfaite et si $\widetilde{K}$ désigne le sous-ensemble compact associé à K par (ii)" du lemme 3.2.3, alors pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_{n-p,n-q}(X,E^*)$ vérifiant $\int_X \varphi \wedge f = 0$ pour toute $f \in Z^{\infty}_{p,q}(c;X,E) \cap \mathcal{D}^{p,q}_{\widetilde{K}}(X,E)$, il existe une forme ψ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur X telle que $\overline{\partial}\psi = \varphi$ sur $\overset{\circ}{K}$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_{n-p,n-q}(X,E^*)$ vérifiant $\int_X \varphi \wedge f = 0$ pour toute $f \in Z^{\infty}_{p,q}(c;X,E) \cap \mathcal{D}^{p,q}_{\widetilde{K}}(X,E)$. On définit une forme linéaire L_φ sur $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E) \cap E^{\infty}_{p,q+1}(c;X,E)$ en posant

$$L_\varphi(\beta) = \int_X \varphi \wedge \alpha \quad \text{si} \quad \beta = \overline{\partial}\alpha \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\alpha \subset \widetilde{K}\ .$$

D'après le lemme 3.2.3 et la condition d'orthogonalité sur φ, la forme L_φ est bien définie. De plus grâce à la condition (ii)'$_K$ et au théorème de l'application ouverte, L_φ est continue ; on peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach et étendre L_φ en une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^{p,q+1}(X,E)$. Cette extension définit un courant S sur X tel que

$$\langle S, \overline{\partial}\alpha \rangle = \int_X \varphi \wedge \alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathcal{D}^{p,q}_K(X,E)$$

ce qui implique $\overline{\partial}S = \varphi$ sur $\overset{\circ}{K}$. L'injectivité de l'application $\phi^{n-p,n-q}$ donne alors l'existence de ψ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur X telle que $\overline{\partial}\psi = \varphi$ sur $\overset{\circ}{K}$. $\square$

Lemme 3.2.5 *Soit X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X et p et q des entiers tels que $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$. Supposons que*

(ii)' Pour tout compact K de X, $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E) \cap E^{\infty}_{p,q+1}(c;X,E)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{p,q+1}_K(X,E)$.

On note $\widetilde{K}$ un compact de X associé au compact K par l'assertion (ii)" du lemme 3.2.3.

Soient K_1, K_2, K_3 trois compacts de X tels que

$$\overset{\circ}{K}_1 \subset \widetilde{K}_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset \widetilde{K}_2 \subset \overset{\circ}{K}_3 \subset \widetilde{K}_3 \ ,$$

alors l'espace $Z^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_2, E^*)$ est dense dans $Z^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_3, E)$ pour la topologie de $\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_1, E^*)$.

Démonstration. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de prouver que pour tout courant $T \in \mathcal{E}'^{p,q+1}(\overset{\circ}{K}_1, E)$ qui vérifie $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute forme différentielle $\varphi \in Z^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_3, E^*)$ alors $\langle T, \psi\rangle = 0$ pour toute forme différentielle $\psi \in Z^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_2, E^*)$.

Soit $T \in \mathcal{E}'^{p,q+1}(\overset{\circ}{K}_1, E)$ un courant tel que $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute forme $\varphi \in Z^\infty_{n-p,n-q-1}\ (\overset{\circ}{K}_3, E^*)$, alors T est $\overline{\partial}$-fermé et grâce à la surjectivité de l'application $\phi^{p,q+1}_{c,\overset{\circ}{K}_1}$ il existe une forme différentielle f $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\overset{\circ}{K}_1$ et un courant $T \in \mathcal{E}'^{p,q}(\overset{\circ}{K}_1, E)$ tels que $T = \overline{\partial}\widetilde{T} + f$ sur X. De plus la forme f vérifie $\int_X f \wedge \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in Z^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_3, E^*)$. Nous allons prouver que $f \in E^\infty_{p,q+1}(c; X, E)$. Posons

$$\widetilde{E}^\infty_{n-p,n-q}(\overset{\circ}{K}_3, E^*) = \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q}(X, E^*) \mid \int_X \varphi \wedge \theta = 0,\ \forall \theta \in Z^\infty_{p,q}(c; X, E) \cap \mathcal{D}^{p,q}_{\widetilde{K}_3}(X, E)\Big\} \ .$$

On définit une forme linéaire $L_f : \widetilde{E}^\infty_{n-p,n-q}(\overset{\circ}{K}_3, E^*) \to \mathbb{C}$ de la manière suivante : si $\varphi \in \widetilde{E}^\infty_{n-p,n-q}(\overset{\circ}{K}_3, E^*)$, d'après le lemme 3.2.4 il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q-1}(X, E^*)$ telle que $\varphi = \overline{\partial}\psi$ sur $\overset{\circ}{K}_3$, on pose alors $L_f(\varphi) = \int_X f \wedge \psi$. Les conditions d'orthogonalité satisfaites par f impliquent que L_f est bien définie. De plus, il résulte du théorème de l'application ouverte que L_f est continue car l'opérateur $\overline{\partial}$ est continu entre les espaces de Fréchet $\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q-1}(X, E^*) \cap \mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q-1}(\overset{\circ}{K}_3, E^*)$ et $\widetilde{E}^\infty_{n-p,n-q}(\overset{\circ}{K}_3, E^*)$. Par le théorème de Hahn-Banach L_f s'étend à $\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q}(X, E^*)$ en un courant $\widetilde{S} \in \mathcal{E}'^{p,q}(X, E^*)$ tel que $\overline{\partial}\widetilde{S} = f$ sur X. L'injectivité de l'application $\phi^{p,q+1}_{c,X}$ donne alors l'existence d'une (p,q)-forme g de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X telle que $\overline{\partial} g = f$ sur X. La forme f appartient donc à $\mathcal{D}^{p,q+1}_{K_1}(X, E) \cap$

$E^{\infty}_{p,q+1}(c;X,E)$ et il résulte de l'implication *(ii)'* $\Rightarrow$ *(ii)"* du lemme 3.2.3 qu'il existe une forme différentielle $h \in \mathcal{D}^{p,q}_{\widetilde{K}_1}(X,E)$ telle que $\overline{\partial}h = f$ sur X. Soit $\psi \in Z^{\infty}_{n-p,n-q-1}(\mathring{K}_2,E^*)$, alors

$$\langle T,\psi\rangle = \langle \overline{\partial}\widetilde{T} + \overline{\partial}h,\psi\rangle = 0$$

car les supports respectifs de $\widetilde{T}$ et h sont contenus dans $\widetilde{K}_1$ lui-même inclus dans $\mathring{K}_2$. □

Nous pouvons maintenant prouver l'implication *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*

Supposons que *(ii)* est satisfaite et fixons $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_{n-p,n-q}(X,E^*)$ vérifiant $\int_X \varphi \wedge f = 0$ pour toute $f \in Z^{\infty}_{p,q}(c;X,E)$. D'après le lemme 3.2.3 les conditions *(ii)'* et *(ii)"* sont satisfaites soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de X telle que $\mathring{K}_n \subset\subset \widetilde{K}_n \subset\subset \mathring{K}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. En utilisant le lemme 3.2.4, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver une forme différentielle ψ_n de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur X telle que $\overline{\partial}\psi_n = \varphi$ sur $\mathring{K}_n$. Grâce au lemme 3.2.5, on obtient une forme $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}_{n-p,n-q-1}(X,E^*)$ telle que $\overline{\partial}\psi = \varphi$ sur X en utilisant un procédé de Mittag-Leffler ; par conséquent $\varphi \in E^{\infty}_{n-p,n-q}(X,E^*)$. L'inclusion inverse est une conséquence directe de la formule de Stokes. □

Chapitre 4

Applications

Dans cette partie nous donnons plusieurs applications de la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman. La première est un théorème de finitude pour la cohomologie de Dolbeault dans les variétés analytiques complexes compactes, la seconde un théorème d'annulation pour la cohomologie de Dolbeault en degré antiholomorphe maximal dans les variétés analytiques complexes connexes non compactes. Nous terminons par différents théorèmes d'extension pour les fonctions holomorphes.

4.1 Théorème de finitude de Kodaira

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Si U est un ouvert de X , $p, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq p, q \leq n$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$Z^k_{p,q}(U)$ est l'espace de Fréchet des (p,q)-formes $\overline{\partial}$-fermées de classe $\mathcal{C}^k$ sur U;

$E^k_{p,q}(U)$ est le sous espace de $Z^k_{p,q}(U)$ des formes f telles que $f = \overline{\partial} g$ avec $g \in \mathcal{C}^k_{p,q-1}(U)$;

$H^{p,q}_k(U)$ est l'espace quotient $Z^k_{p,q}(U)/E^k_{p,q}(U)$, c'est le groupe de cohomologie de Dolbeault de bidegré (p,q) à coefficients $\mathcal{C}^k$.

D'après l'isomorphisme de Dolbeault, le morphisme naturel de $H^{p,q}_\infty(U)$ dans $H^{p,q}_k(U)$ est un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on posera donc $H^{p,q}_k(U) = H^{p,q}(U)$.

Nous allons déduire de la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman pour les formes différentielles à support compact et des estimations du noyau de Bochner-Martinelli de la Proposition 2.1 du chapitre I un théorème de finitude pour la cohomologie de Dolbeault.

Théorème 4.1.1 *Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension n. Pour tout (p,q) tel que $0 \leq p,q \leq n$*

$$\dim H^{p,q}(X) < +\infty \ .$$

On déduit aisément du théorème ci-dessus et de l'isomophisme de Dolbeault que si X est une variété analytique complexe compacte de dimension n et Ω^p le faisceau des germes de p-formes holomorphes sur X, $0 \leq p \leq n$, pour tout $0 \leq q \leq n$

$$H^q(X, \Omega^p) = 0$$

Lemme 4.1.2 *Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension n. Pour tout $\alpha \in]0,1[$ et (p,q) tel que $0 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$, on peut trouver des opérateurs linéaires continus*

$$T_{p,q} \ : Z^0_{p,q}(X) \to \mathcal{C}^\alpha_{p,q-1}(X)$$

et

$$K_{p,q} \ : Z^0_{p,q}(X) \to Z^\alpha_{p,q}(X)$$

tels que

$$\overline{\partial} \circ T_{p,q} = Id + K_{p,q} \quad \text{sur} \quad Z^0_{p,q}(X) \ .$$

Démonstration. Soient $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_i)_{i\in I}$ deux recouvrements finis de X tels que V_i est biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $U_i \subset\subset V_i$ pour tout $i \in I$. On choisit une partition de l'unité $(\chi_i)_{i\in I}$ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ et des fonctions φ_i de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans V_i et égales à 1 au voisinage de $\overline{U}_i$.

Soit f une (p,q)-forme continue sur X.Posons

$$T_i f = (-1)^{p+q} \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}(\varphi_i f) \mid_{U_i} \quad \text{et} \quad K_i f = (-1)^{p+q} \widetilde{B}_{\mathbb{C}^n}(\overline{\partial}\varphi_i \wedge f) \mid_{U_i} \ .$$

On déduit du Théorème 1.1.5 que

$$\overline{\partial} T_i f = f \mid_{U_i} + K_i f - T_i \overline{\partial} f \quad \text{si} \quad 1 \leq q < n$$

$$\overline{\partial} T_i f = f \mid_{U_i} \quad \text{si} \quad q = n.$$

Posons

$$T_{p,q} = \sum_{i\in I} \chi_i T_i$$

$$K_{p,q} = \sum_{i\in I} \overline{\partial}\chi_i \wedge T_i + \sum_{i\in I} \chi_i K_i \quad \text{si} \quad 1 \leq q < n$$

$$K_{p,q} = \sum_{i \in I} \overline{\partial}\chi_i \wedge T_i \quad \text{si} \quad q = n.$$

On a alors

$$\overline{\partial}T_{p,q}f = f + K_{p,q}f - T_{p,q}\overline{\partial}f \quad \text{si} \quad 1 \leq q < n$$

$$\overline{\partial}T_{p,q}f = f \quad \text{si} \quad q = n.$$

Grâce aux estimations de la Proposition 1.2.1 du chapitre 1, il est facile de voir que $T_{p,q}$ opère bien de $\mathcal{C}^0_{p,q}(X)$ dans $\mathcal{C}^\alpha_{p,q-1}(X)$ et que $K_{p,q}$ opère de $\mathcal{C}^0_{p,q}(X)$ dans $\mathcal{C}^\alpha_{p,q}(X)$. □

Démonstration du Théorème 4.1.1. Considérons tout d'abord le cas où $q = 0$. Puisque X est compacte, $\mathcal{O}(X)$ est un espace de Banach. Mais par le théorème de Montel tout borné de $\mathcal{O}(X)$ est compact, $\mathcal{O}(X)$ est donc de dimension finie. Il suffit alors de remarquer que grâce à l'hypoellipticité du $\overline{\partial}$

$$H^{0,0}(X) = Z^0_{0,0}(X) = \mathcal{O}(X).$$

Le groupe $H^{p,0}(X)$ est également de dimension finie car $H^{p,0}(X) = \mathcal{O}(X, E)$, où $\mathcal{O}(X, E)$ est l'espace des fonctions holomorphes à valeurs dans le fibré vectoriel $\wedge^p T^{1,0}X$.

Supposons maintenant que $q \geq 1$, grâce à l'isomorphisme de Dolbeault il suffit de prouver que $E^0_{p,q}(X)$ est de codimension finie dans $Z^0_{p,q}(X)$. Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et considérons les opérateurs $T_{p,q}$ et $K_{p,q}$ du Lemme 4.1.2. Puisque d'après le théorème d'Ascoli, le plongement

$$Z^\alpha_{p,q}(X) \to Z^0_{p,q}(X)$$

est compact, $K_{p,q}$ est un opérateur compact de $Z^0_{p,q}(X)$ dans lui-même. Par conséquent $\overline{\partial} \circ T_{p,q}$ est un opérateur de Fredholm sur $Z^0_{p,q}(X)$ et comme l'image de cet opérateur est contenue dans $E^0_{p,q}(X)$, il en résulte que $E^0_{p,q}(X)$ est de codimension finie dans $Z^0_{p,q}(X)$. □

4.2 Théorème d'annulation de Malgrange

Le théorème de finitude précédent n'est plus vrai si la variété n'est pas supposée compacte, néanmoins il subsiste un théorème d'annulation pour la cohomologie de Dolbeault de bidegré antiholomorphe maximal dans les variétés analytiques complexes connexes et non compactes.

Nous allons démontrer le théorème suivant dû à Malgrange :

Théorème 4.2.1 *Soit X une variété analytique complexe de dimension n connexe et non compacte. Alors pour tout p, $0 \leq p \leq n$,*

$$H^{p,n}(X) = 0.$$

C'est-à-dire, si $f \in \mathcal{C}^0_{p,n}(X)$, $0 \leq p \leq n$, est une (p,n)-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\overline{\partial}$-fermée dans X, il existe une $(p,n-1)$-forme u de classe $\mathcal{C}^k$ sur X telle que $\overline{\partial} u = f$ sur X.

La démonstration de ce théorème est basée sur des résultats locaux d'approximation et de résolution du $\overline{\partial}$, un phénomène de propagation de l'exactitude des formes différentielles relativement à une fonction d'exhaustion et sur les propriétés topologiques de la variété X. Grâce à l'isomorphisme de Dolbeault, il suffit de prouver que $H^{p,n}_0(X) = 0$.

Résultats locaux

Commençons par rappeler le résultat local de résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes de bidegré (p,n) que nous avons obtenu dans la première partie (Corollaire 1.2.5).

Théorème 4.2.2 *Si D est un domaine borné à bord $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$, pour toute (p,n)-forme f dans $\mathcal{C}^0_{p,n}(\overline{D})$, il existe une $(p,n-1)$-forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur $\overline{D}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, telle que $\overline{\partial} u = f$ dans D et $|u|_{\alpha,\overline{D}} \leq |f|_{0,\overline{D}}$.*

Définition 4.2.3 *Soient U et V deux ouverts de X tels que $U \subset V$. On dira que U* n'a pas de trou relativement à V *si pour tout compact K de U il existe un compact $\widetilde{K}$ de U tel que $K \subset \widetilde{K}$ et $V \setminus \widetilde{K}$ n'ait pas de composantes connexes relativement compactes dans V.*

Proposition 4.2.4 *Pour tout point z_0 de X, il existe un voisinage V de z_0 dans X tel que pour tout ouvert $\Omega \subset\subset V$ sans trou relativement à V l'image de l'application restriction*

$$Z^0_{p,n-1}(V) \longrightarrow Z^0_{p,n-1}(\Omega)$$

soit dense dans $Z^0_{p,n-1}(\Omega)$ pour la topologie $\mathcal{C}^0$.

Démonstration. Soit z_0 un point fixé de X. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage V de z_0 dans X tel que pour tout ouvert $\Omega \subset\subset V$ sans trou relativement à V, toute forme linéaire continue L sur $\mathcal{C}^0_{p,n-1}(\Omega)$, dont la restriction à $Z^0_{p,n-1}(V)$ est nulle, s'annule identiquement sur $Z^0_{p,n-1}(\Omega)$. Notons que la forme linéaire L est un $(n-p,1)$-courant $\overline{\partial}$-fermé d'ordre nul sur V à support compact dans Ω. D'après l'isomorphisme de Dolbeault, il existe un courant S d'ordre nul sur V à support compact dans Ω et une forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans V à support compact dans Ω telle que $L = \overline{\partial}S + f$ et $\int_V f \wedge \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in Z^\infty_{p,n-1}(V)$. Il résulte alors des Théorèmes 1.4.1 et 3.2.2 que si V est biholomorphe à un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$, il existe un $(n-p,0)$-courant T d'ordre nul à support compact dans V tel que $\overline{\partial}T = L$. Le courant T est alors une $(n-p,0)$-forme holomorphe sur $V \setminus \operatorname{supp} L$, qui s'annule sur un ouvert de $V \setminus \operatorname{supp} L$, donc, grâce au Principe du prolongement analytique, T est identiquement nulle sur un voisinage de $V \setminus \Omega$ car Ω n'a pas de trou relativement à V. Par conséquent le support de T est contenu dans Ω. Soit $f \in Z^0_{p,n-1}(\Omega)$, il existe alors une suite $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^\infty_{p,n-1}(\Omega)$ qui converge vers f pour la topologie $\mathcal{C}^0$ et telle que la suite $(\overline{\partial}f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la topologie $\mathcal{C}^0$. En effet soit $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_i)_{i\in I}$ deux recouvrements localement finis de Ω tels que V_i est biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $U_i \subset\subset V_i$ pour tout $i \in I$. On choisit une partition de l'unité $(\chi_i)_{i\in I}$ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ et des fonctions φ_i de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans V_i et égales à 1 au voisinage de U_i. Si on pose $f_\nu = \sum_{i\in I} \chi_i R_{1/\nu}\varphi_i f$, où $R_{1/\nu}$ est un opérateur de convolution, la suite $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ a les propriétés requises. On obtient alors

$$L(f) = \lim_{\nu\to\infty} L(f_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \langle \overline{\partial}T, f_\nu\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle T, \overline{\partial}f_\nu\rangle = 0.$$

□

Remarque. Il résulte de la démonstration que tout voisinage V de z_0 dans X biholomorphe à un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ convient.

Premières conséquences globales des résultats locaux

En reprenant la démonstration du Théorème 4.1.1, on peut déduire du Théorème 4.2.2 que si D est un ouvert relativement compact de X alors $E^0_{p,n}(\overline{D})$ est fermé et de codimension finie dans $Z^0_{p,n}(\overline{D})$. De plus un résultat d'analyse fonctionnelle (cf. [5], Annexe C) nous donne

Proposition 4.2.5 *Soit D est un ouvert relativement compact de X. Il existe un opérateur linéaire continu*

$$A \ : Z^0_{p,n}(\overline{D}) \longrightarrow \mathcal{C}^0_{p,n-1}(\overline{D})$$

tel que $\overline{\partial} Af = f$ pour toute $f \in E^0_{p,n}(\overline{D})$.

Méthode des bosses

Définition 4.2.6 *Une* bosse *dans X est une triplet ordonné $[V, \Omega_1, \Omega_2]$, où V, Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de X tels que*

(i) V est biholomorphe à un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$

(ii) Ω_1 et Ω_2 sont à bord de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset\subset V$.

(iii) $\overline{\Omega}_1$ possède une base de voisinages sans trou relativement à V.

Définition 4.2.7 *Un élément d'extension dans X est un couple ordonné $[D_1, D_2]$, où $D_1 \subset D_2$ sont des ouverts à bord de classe $\mathcal{C}^1$ de X tels qu'il existe une bosse $[V, \Omega_1, \Omega_2]$ vérifiant*

$$D_2 = D_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 = D_1 \cap \Omega_2 \quad \text{et} \quad \overline{(D_1 \setminus \Omega_2)} \cap \overline{(\Omega_2 \setminus \Omega_1)} = \emptyset.$$

Proposition 4.2.8 *Soit $[D_1, D_2]$ un élément d'extension dans X tel que $D_1 \subset\subset X$, alors l'application restriction*

$$\operatorname{germ} H^{p,n}_0(\overline{D}_2) \to \operatorname{germ} H^{p,n}_0(\overline{D}_1)$$

est injective.

Démonstration. Soient $U_1 \subset U_2$ des voisinages ouverts de $\overline{D}_1$ et $\overline{D}_2$ dans X et $f \in Z^0_{p,n}(U_2)$ and $u_1 \in \mathcal{C}^0_{p,n-1}(U_1)$ telles que $\overline{\partial} u_1 = f$ sur U_1. On doit prouver l'existence d'un voisinage $W_2 \subset U_2$ de $\overline{D}_2$ dans X et d'une forme différentielle $u_2 \in \mathcal{C}^0_{p,n-1}(W_2)$ telle que $\overline{\partial} u_2 = f$.

Soit $[V, \Omega_1, \Omega_2]$ la bosse associée à l'élément d'extension $[D_1, D_2]$ et $V_2 \subset\subset U_2 \cap V$ un voisinage de $\overline{\Omega}_2$ dans X. D'après le Théorème 4.2.2, il existe $u \in \mathcal{C}^0_{p,n-1}(V_2)$ tel que $\overline{\partial} u = f$ sur V_2. On a par conséquent $\overline{\partial}(u_1 - u) = 0$ sur $U_1 \cap V_2$. On choisit un voisinage $W_1 \subset U_1 \cap V_2$ de $\overline{\Omega}_1$ sans trou relativement à V, alors grâce à la Proposition 4.2.4 on peut trouver une suite$(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset Z^0_{p,n-1}(V)$ qui converge vers $u_1 - u$ pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur W_1. Soit W un voisinage de $\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1}$ tel que $W \subset V_2 \cap V$ et $W \cap \overline{(D_1 \setminus \Omega_2)} = \emptyset$, et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans W et égale à 1 sur un voisinage $\widetilde{W}$ de $\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1}$. En posant $v_\nu = (1 - \chi) u_1 + \chi(u + w_\nu)$, on définit une suite $(v_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^0_{p,n-1}(U_1 \cup W)$ telle que la suite $\overline{\partial} v_\nu = f - \overline{\partial}\chi \wedge (u_1 - u - w_\nu)$ converge vers f pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur le voisinage $\widetilde{U}_1 \cup \widetilde{W}$ de $\overline{D}_2$ dans X, où $\widetilde{U}_1$ est un voisinage de $\overline{D}_1$ tel que $\widetilde{U}_1 \subset U_1$ et $\widetilde{U}_1 \cap W = W_1 \cap W$. Soit $W_2 \subset\subset \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{W}$ un voisinage de $\overline{D}_2$. Alors en utilisant la Proposition 4.2.5

on obtient une $(p,n-1)$-forme différentielle u_2 continue sur W_2 telle que $\overline{\partial} u_2 = f$ sur W_2. □

Proposition 4.2.9 *Soit $[D_1, D_2]$ un élément d'extension dans X tel que $D_1 \subset\subset X$, alors l'application restriction*

$$\operatorname{germ} Z^0_{p,n-1}(\overline{D}_2) \to \operatorname{germ} Z^0_{p,n-1}(\overline{D}_1)$$

est d'image dense dans $\operatorname{germ} Z^0_{p,n-1}(\overline{D}_1)$ *pour la topologie $\mathcal{C}^0$.*

Démonstration. Soient U_1 un voisinage ouvert de $\overline{D}_1$ dans X et $[V, \Omega_1, \Omega_2]$ la bosse associée à l'élément d'extension $[D_1, D_2]$. Fixons $f \in Z^0_{p,n-1}(U_1)$ et $W_1 \subset U_1$ un voisinage de $\overline{\Omega}_1$ sans trou relativement à V. D'après la Proposition 4.4 il existe une suite $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset Z^0_{p,n-1}(V)$ qui converge vers f pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur W_1. Soit W un voisinage de $\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1}$ tel que $W \subset V$ et $W \cap \overline{(D_1 \setminus \Omega_2)} = \emptyset$, et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans W et égale à 1 sur un voisinage $\widetilde{W}$ de $\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1}$. En posant $\tilde{f}_\nu = (1-\chi) f + \chi g_\nu$, on définit une suite $(\tilde{f}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de formes continues sur le voisinage $U_1 \cup W$ de $\overline{D}_2$ qui converge vers f pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{D}_1$. De plus, puisque $\overline{\partial} \tilde{f}_\nu = \overline{\partial} \chi \wedge (f - g_\nu)$, la suite $(\overline{\partial} \tilde{f}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur $U_2 = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{W}$, où $\widetilde{U}_1$ est un voisinage de $\overline{D}_1$ tel que $\widetilde{U}_1 \subset U_1$ et $\widetilde{U}_1 \cap W = W_1 \cap W$. Comme $D_1 \subset\subset X$, on peut choisir un voisinage relativement compact W_2 de $\overline{D}_2$ dans X et appliquer la Proposition 4.2.5. Par conséquent il existe suite $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^0_{p,n-1}(\overline{W}_2)$ qui converge vers zéro pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{W}_2$ et satisfait $\overline{\partial} u_\nu = \overline{\partial} \tilde{f}_\nu$. Si $f_\nu = \tilde{f}_\nu - u_\nu$, on obtient une suite $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset Z^0_{p,n}(W_2)$ qui converge vers f pour la topologie $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{D}_1$. □

Un peu de topologie

Grâce à la théorie de Morse on a le résultat suivant :

Lemme 4.2.10 *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X dont tous les points critiques sont non dégénérés et qui vérifie :*

(i) aucun point critique de φ n'appartient à $\varphi^{-1}(\{0,1\})$;

(ii) $\varphi^{-1}([0,1])$ est compact;

(iii) φ ne possède aucun point de maximum local dans $\varphi^{-1}(]0,1[)$.

Alors il existe un nombre fini d'éléments d'extension $[D_j, D_{j+1}]$, $j = 0, \dot{;} N$ tels que $D_0 = \varphi^{-1}((-\infty, 0[)$ et $D_{N+1} = \varphi^{-1}((-\infty, 1[)$.

Un théorème de Green et Wu nous donne

Proposition 4.2.11 *Si X est une variété analytique complexe connexe et non compacte, X possède une fonction d'exhaustion de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans maximum local et dont tous les points critiques sont non dégénérés.*

Propagation de l'exactitude

On déduit facilement des Propositions 4.2.8 et 4.2.9 et du lemme 4.2.10 le résultat de propagation suivant :

Proposition 4.2.12 *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X sans maximum local et dont tout les points critiques sont non dégénérés. Soit $\alpha, \beta \in \varphi(X)$ avec $\alpha < \beta$ et tels que aucun point critique de φ n'appartienne à $\varphi^{-1}(\{\alpha, \beta\})$, on pose $D_\alpha = \varphi^{-1}((-\infty, \alpha[)$ et $D_\beta = \varphi^{-1}((-\infty, \beta[)$ et on suppose que $D_\alpha \subset\subset X$.*

(i) l'application restriction

$$\operatorname{germ} H_0^{p,n}(\overline{D}_\beta) \to \operatorname{germ} H_0^{p,n}(\overline{D}_\alpha)$$

est injective

(ii) l'application restriction

$$\operatorname{germ} Z_{p,n-1}^0(\overline{D}_\beta) \to \operatorname{germ} Z_{p,n-1}^0(\overline{D}_\alpha)$$

est d'image dense dans $\operatorname{germ} Z_{p,n-1}^0(\overline{D}_\alpha)$ *pour la topologie $\mathcal{C}^0$.*

Démonstration du Théorème 4.2.1. Soit φ une fonction d'exhaustion de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X sans maximum local et dont tout les points critiques sont non dégénérés. Soit z_0 un point où φ atteint sont minimum. D'après le Corollaire 1.4.2, il existe un voisinage Ω_0 de z_0 tel que $H_0^{p,n}(D) = 0$ pour tout $D \subset\subset \Omega_0$. Comme φ est une fonction d'exhaustion sur X, elle atteint son minimum en un nombre fini de points. On note Ω la réunion des voisinages Ω_0 associés à ces points et on choisit $\alpha_0 \in \varphi(X)$ tel que $\varphi^{-1}((-\infty, \alpha_0[)$ est non vide et contenu dans Ω et $(\alpha_j)_{j\geq 1} \subset \varphi(X)$ tels que aucun point critique de φ n'appartienne à $\varphi^{-1}(\alpha_j)$, $j\geq 0$, et si $D_j = \varphi^{-1}((-\infty, \alpha_j[)$, $D_j \subset D_{j+1}$ pour $j\geq 0$ et $X = \bigcup_{j\geq 0} D_j$. On déduit alors du *(i)* de la Proposition 4.2.12 et du choix de D_0 que, pour tout $j\geq 0$,

$$\operatorname{germ} H_0^{p,n}(\overline{D}_j) = 0.$$

Soit $f \in Z^0_{p,n}(X)$, il existe alors une suite de formes différentielles $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\tilde{u}_j \in \operatorname{germ} \mathcal{C}^0_{p,n-1}(\overline{D}_j)$, $\overline{\partial}\tilde{u}_j = f$ sur un voisinage de $\overline{D}_j$. Nous allons construire une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $u_j \in \operatorname{germ} \mathcal{C}^0_{p,n-1}(\overline{D}_j)$, $\overline{\partial}u_j = f$ sur un voisinage de $\overline{D}_j$ et $\|u_{j+1} - u_j\|_{0,\overline{D}_j} \leq \frac{1}{2^j}$. Cette suite convergera vers une forme différentielle $u \in \mathcal{C}^0_{p,n}(X)$ qui satisfait $\overline{\partial}u = f$.

Posons $u_0 = \tilde{u}_0$ et supposons que nous ayons déjà construit $(u_j)_{0\leq j\leq j_0}$. Alors $\tilde{u}_{j_0+1} - u_{j_0} \in \operatorname{germ} Z^0_{n,n-1}(\overline{D}_{j_0+1})$ et grâce au *(ii)* de la Proposition 4.2.12, on peut trouver $v_{j_0+1} \in \operatorname{germ} Z^0_{n,n-1}(\overline{D}_{j_0+1})$ tel que $\|\tilde{u}_{j_0+1} - u_{j_0} - v_{j_0+1}\|_{0,\overline{D}_{j_0}} < \frac{1}{2^{j_0}}$. La forme $u_{j_0+1} = \tilde{u}_{j_0+1} - v_{j_0+1}$ a les propriétés demandées. □

4.3 Phénomène de Hartogs

Le but de ce paragraphe est de prouver que si D est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, et K un compact de D tel que $D \setminus K$ soit connexe, toute fonction holomorphe dans $D \setminus K$ se prolonge holomorphiquement à D tout entier.

Commençons par préciser le Corollaire 1.2.5 du chapitre 1 lorsque f est une $(0,1)$-forme.

Théorème 4.3.1 *Soit $f \in \mathcal{C}^k_{0,1}(\mathbb{C}^n)$ une $(0,1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 0, \overline{\partial}$-fermée, à support compact dans $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Alors il existe une fonction u de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, à support compact telle que $\overline{\partial}u = f$ sur $\mathbb{C}^n$. De plus u est donnée par la représentation intégrale*

$$u(z) = \int_{\zeta\in\mathbb{C}^n} f(\zeta) \wedge B^0_0(z,\zeta). \tag{4.1}$$

et le support de u est contenu dans le complémentaire de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} f$.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé dans le Corollaire 1.2.5 du chapitre 1 que la fonction u donnée par (4.1) est une solution de classe $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ de l'équation $\overline{\partial}u = f$ sur $\mathbb{C}^n$. Il reste donc à montrer que u est à support compact dans $\mathbb{C}^n$. Remarquons que u est holomorphe en dehors du support de f car $\overline{\partial}u = f$. De plus si u est donnée par la relation (4.1)

$$|u(z)| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(z, \operatorname{supp} f)} |f|_{0,\mathbb{C}^n}$$

ce qui implique que $u(z) \to 0$ quand $|z|$ tend vers l'infini.

Pour $z \in \mathbb{C}^n, n \geq 2$, posons $z = (z', z_n)$ où $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $z_n \in \mathbb{C}$. Puisque le support de f est compact, il existe $R > 0$ tel que si $|z'| > R$, l'ensemble $\{z'\} \times \mathbb{C}$ ne rencontre pas le support de f. Fixons un tel z', alors la fonction $z_n \mapsto u(z', z_n)$ est holomorphe et tend vers 0 quand $|z_n|$ tend vers l'infini. D'après le Théorème de Liouville elle est donc identiquement nulle. Nous avons donc montré que u est nulle sur l'ouvert $\{z' \in \mathbb{C}^n \mid |z'| > R\} \times \mathbb{C}$ du complémentaire de $\operatorname{supp} f$. Puisque u est holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} f$, elle est donc identiquement nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} f$, ce qui prouve que u est à support compact. $\square$

Remarque. Le Théorème 4.3.1 est faux pour $n = 1$. Cela résulte du fait plus général suivant : si f est une $(0, n)$-forme différentielle continue, $\overline{\partial}$-fermée, à support compact dans $\mathbb{C}^n$, l'équation $\overline{\partial} u = f$ n'a en général pas de solution à support compact. En effet si u_0 est une solution de l'équation $\overline{\partial} u = f$ à support compact dans $\mathbb{C}^n$ et si D est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant le support de u_0 et à bord de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\int_{\partial D} u_0 \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0.$$

Mais en appliquant la formule de Stokes, on obtient

$$\int_{\partial D} u_0 \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = \int_D d(u_0 \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = \int_{\mathbb{C}^n} f \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

et ce dernier terme n'est pas nul en général.

Pour $n > 1$, le Théorème 4.3.1 nous dit que le groupe de cohomologie de Dolbeault à support compact $H_c^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ est nul.

Théorème 4.3.2 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\mathbb{C}^n \setminus D$ soit connexe. Supposons $n > 1$, alors pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage de ∂D, il existe une fonction F holomorphe au voisinage de $\overline{D}$ qui coïncide avec f sur ∂D.*

Démonstration. Notons $U_{\partial D}$ le voisinage de ∂D sur lequel f est définie et holomorphe et choisissons χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $U_{\partial D}$ et égale à 1 au voisinage de ∂D. Alors la fonction $\tilde{f} = \chi f$ est définie dans $\mathbb{C}^n$ et coïncide avec f au voisinage de ∂D. Posons

$$g = \begin{cases} \overline{\partial} \tilde{f} & \text{sur } D \\ 0 & \text{sur } \mathbb{C}^n \setminus D. \end{cases}$$

On a ainsi défini une $(0, 1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ à support dans D, car $\overline{\partial} \tilde{f} = \overline{\partial} f = 0$ au voisinage de ∂D. De plus g est $\overline{\partial}$-fermée dans

$\mathbb{C}^n$, on peut donc considérer l'équation $\overline{\partial} u = g$. D'après le Théorème 4.3.1, cette équation possède une solution u_0 à support compact donc nulle sur un ouvert de $\mathbb{C}^n \setminus D$ car D est borné. Puisque $\overline{\partial} u_0 = g, u_0$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus D$ et comme $\mathbb{C}^n \setminus D$ est connexe par hypothèse, u_0 est identiquement nulle sur $\mathbb{C}^n \setminus D$. Par conséquent $F = \tilde{f} - u_0$ est la fonction cherchée. □

Corollaire 4.3.3 *Soient D un domaine de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de D tel que $D \setminus K$ soit connexe. Alors toute fonction holomorphe sur $D \setminus K$ s'étend en une fonction holomorphe sur D.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que K est connexe. Soit D' un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\mathbb{C}^n \setminus D'$ soit connexe, contenu dans D et contenant K. Un tel ouvert existe car $D \setminus K$ est connexe, il suffit de prendre $D' = \{z \in D \mid \operatorname{dist}(z, K) < \varepsilon\}$, ε assez petit, si $D \neq \mathbb{C}^n$ et $D' = B(0, R)$, R assez grand, si $D = \mathbb{C}^n$. Si f est holomorphe dans $D \setminus K$, elle est holomorphe au voisinage de $\partial D'$ et par le Théorème 4.3.2 il existe F holomorphe au voisinage de $\overline{D}'$ telle que $f\big|_{\partial D'} = F\big|_{\partial D'}$. Puisque $\partial D'$ est une hypersurface réelle de $\mathbb{C}^n$ et que f et F sont holomorphes au voisinage $\partial D'$ et coïncident sur $\partial D'$, elles coïncident sur la composante connexe de leur domaine de définition commun qui contient $\partial D'$. La fonction $\widetilde{F} = \begin{cases} F \text{ sur } & D' \\ f \text{ sur } & D \setminus K \end{cases}$ est l'extension cherchée. □

4.4 Théorème de Hartogs-Weinstock

Nous allons prouver une généralisation du phénomène de Hartogs pour les variétés analytiques complexes.

Soit X une variété analytique complexe connexe non compacte de dimension n et D un domaine relativement compact de X à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$. On cherche à caractériser les traces sur le bord de D des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{D}$ et holomorphes dans D.

Définition 4.4.1 *Une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ∂D est appelée* fonction CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ *s'il existe une fonction $\widetilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X telle que $\overline{\partial} f$ s'annule à l'ordre infini sur ∂D.*

Notons que la trace sur le bord de D d'une fonction holomorphe au voisinage de ∂D est une fonction CR de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus le Théorème 4.3.2 reste vrai si on remplace la fonction f holomorphe au voisinage de ∂D par une fonction CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ∂D.

Théorème 4.4.2 *Soit X une variété analytique complexe connexe non compacte de dimension n et D un domaine relativement compact de X à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ∂D, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{D}$ et holomorphe dans D telle que $F|\partial D = f$.

(ii) La fonction f est CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\int_{\partial D} f\varphi = 0$ pour toute $(n, n-1)$-forme φ $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de $\overline{D}$.

Démonstration. Suposons que *(i)* est satisfaite. Comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{D}$ et holomorphe dans D, elle possède une extension $\widetilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à X tout entier qui vérifie $\overline{\partial}\widetilde{f} = 0$ sur $\overline{D}$; par conséquent $f = F|\partial D$ est CR de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus si φ est une $(n, n-1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de $\overline{D}$ on a

$$\int_{\partial D} f\varphi = \int_{\partial D} F\varphi = \int_D d(F\varphi) = \int_D F\overline{\partial}\varphi = 0$$

grâce à la formule de Stokes puisque F et φ sont toutes deux $\overline{\partial}$-fermées dans D.

Supposons maintenant que *(ii)* est satisfaite. Soient $U_1, \ldots, U_N$ les composantes connexes relativement compactes de $X \setminus \overline{D}$. Choisissons des points $z_j \in U_j$, $1 \leq j \leq N$, et posons $\widetilde{X} = X \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$. La variété $\widetilde{X}$ est encore une variété analytique complexe connexe et non compacte et d'après le Théorème 4.2.1, $H^{n,n}_\infty(\widetilde{X}) = 0$. Il résulte alors du Théorème 3.2.2 que

$$E^\infty_{0,1}(c; \widetilde{X}) = \Big\{f \in \mathcal{D}^{0,1}(\widetilde{X}) \,|\, \int_{\widetilde{X}} f \wedge \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in Z^\infty_{n,n}(\widetilde{X})\Big\}.$$

Posons $g = \chi_{\overline{D}}\overline{\partial}\widetilde{f}$, où $\chi_{\overline{D}}$ est la fonction caractéristique de $\overline{D}$. La $(0,1)$-forme ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact dans $\widetilde{X}$ et vérifie pour toute $(n, n-1)$-forme φ $\overline{\partial}$-fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de $\overline{D}$

$$\int_{\widetilde{X}} g \wedge \varphi = \int_D \overline{\partial}\widetilde{f} \wedge \varphi = \int_D \overline{\partial}(\widetilde{f} \wedge \varphi) = \int_D d(\widetilde{f} \wedge \varphi) = \int_{\partial D} f \wedge \varphi = 0$$

d'après la formule de Stokes et l'hypothèse *(ii)*. On en déduit donc que $g \in E^\infty_{0,1}(c; X)$ et par conséquent qu'il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\widetilde{X}$ qui vérifie $\overline{\partial}h = g$. Puisque g est à support dans $\overline{D}$, h et holomorphe dans $\widetilde{X} \setminus \overline{D}$ et par prolongement analytique et continuité elle est identiquement nulle sur $\widetilde{X} \setminus D$, car $\widetilde{X} \setminus \overline{D}$ n'a pas de composante connexe relativement compacte. La fonction $F = \widetilde{f} - h$ est l'extension cherchée. □

Bibliographie

[1] Andreotti A. et Kaas A., *Duality on complex spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **27** (1973), 188–263.

[2] Henkin G.M. et Leiterer J., *Theory of functions on complex manifolds*, Akademie-Verlag Berlin and Birkhaüser-Verlag Basel, Boston, Berlin, 1984.

[3] Krantz S.G., *Function theory of several complex variables*, John Waley and Sons, New York, 1982.

[4] Laufer, *On Serre duality and envelopes of holomorphy*, Trans. AMS, **128** (1967), 414–436.

[5] Laurent-Thiébaut C. , *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Savoirs Actuels, InterÉditions/CNRS Éditions, 1997.

[6] Range R.M., *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Graduate text in Math., **108**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.

[7] de Rham G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

[8] Serre J.-P., *Un théorème de dualité*, Commentarii Mathematici Helvetici, **29** (1955), 9–26.