TEICHMÜLLER THEORY AND DYNAMICS

Pierre Dehornoy & Erwan Lanneau (eds.)

Panoramas et Synthèses

Numéro 58

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`christian.smf@cirm-math.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 38 € ($ 57)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`panoramas@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-966-1

Directeur de la publication : Fabien Durand

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 58

TEICHMÜLLER THEORY AND DYNAMICS

Pierre Dehornoy & Erwan Lanneau (eds.)

Société mathématique de France

Pierre Dehornoy
Université Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, F-38000 Grenoble, France
E-mail : `pierre.dehornoy@univ-grenoble-alpes.fr`

Erwan Lanneau
Université Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, F-38000 Grenoble, France
E-mail : `erwan.lanneau@univ-grenoble-alpes.fr`

***Classification mathématique par sujets.* (2010) —** 37D40, 37D20, 37A25, 37C30, 53D30, 53C26, 32G15, 32G20, 32Q45

***Keywords and phrases.* —** Translation surface, Moduli of Riemann surfaces, Teichmüller theory, variation of Hodge structure, Ergodic theory, Uniformly hyperbolic system, Earthquake flow, surface à petits carreaux, K3 surface.

***Mots-clés et phrases.* —** Surface de translation, module de surface de Riemann, théorie de Teichmüller, variation de structure de Hodge, système uniformément hyperbolique, flot de séisme, surface carré-tilde, surface K3.

TEICHMÜLLER THEORY AND DYNAMICS

Pierre Dehornoy & Erwan Lanneau (eds.)

Abstract. — This edition of *Panoramas & Synthèses* follows the 27th edition of the summer School in mathematics, focussed on *Teichmüller dynamics, mapping class groups and applications*. It took place from 11 to 22 June 2018 at the Institut Fourier (UMR CNRS 5582) of Grenoble. During this school, twelve specialists came to present the basics of the theory of translation surfaces and their moduli spaces, as well as the recent advances in the field. This volume brings together four texts, all based on the lecture notes of the school, and illustrates the interaction between Teichmüller theory and dynamics.

Résumé. **(Théorie de Teichmüller et dynamique)** — Ce volume de *Panoramas & Synthèses* fait suite à la 27ᵉ édition de l'école d'été de mathématiques qui portait sur le thème *Teichmüller dynamics, mapping class groups and applications*. Elle s'est déroulée du 11 au 22 juin 2018 à l'Institut Fourier (UMR CNRS 5582) de Grenoble. Lors de cette école, douze spécialistes sont venus présenter les bases de la théorie des surfaces de translation et de leurs espaces de modules, ainsi que les dernières avancées dans ce domaine. Ce recueil regroupe quatre textes, tous issus des notes de cours qui ont été donnés pendant ces semaines, et illustre le lien fort entre théorie de Teichmüller et dynamique.

TABLE OF CONTENTS

ABSTRACTS

These notes provide an introduction to the geometry of K3 surfaces and the dynamics of their automorphisms. The notes are based on lectures delivered in Grenoble in July 2018, and in Beijing in July 2019.

These notes are based on lectures given by the author at the Summer School on *Teichmüller dynamics, mapping class groups and applications* in Grenoble, France, in June 2018 and at the Oberwolfach Seminar on *Anisotropic Spaces and their Applications to Hyperbolic and Parabolic Systems* in June 2019. We derive results about the so-called Ruelle resonances and the asymptotics of correlations for several classes of systems from known results on cohomological equations and invariant distributions for the respective unstable vector fields. In particular, we consider linear pseudo-Anosov diffeomorphisms on surfaces of higher genus, for horocycle flows on surfaces of constant negative curvature and for partially hyperbolic automorphisms of Heisenberg 3-dimensional nilmanfolds. Ruelles resonances for linear pseudo-Anosov maps with applications to the cohomological equation for their unstable translation flows was recently studied in depth by F. Faure, S. Gouëzel and E. Lanneau [9] by methods based on the analysis of the transfer operator of the pseudo-Anosov map. Ruelle resonances for geodesic flows on hyperbolic compact manifolds of any dimension and of partially hyperbolic automorphisms of Heisenberg 3-dimensional nilmanfolds are studied by general results of Dyatlov, Faure and Guillarmou [7] and Faure and Tsujii [10] based on methods of semi-classical analysis. These works do not derive results on cohomological equations for unstable flows or horospherical foliations of these systems.

This text corresponds to a minicourse delivered on June 11, 12 & 13, 2018 during the summer school "Teichmüller dynamics, mapping class groups and applications" at Institut Fourier, Grenoble, France.

In this article, we cover the same topics from our minicourse, namely, origamis, Veech groups, affine homeomorphisms, and the Kontsevich-Zorich cocycle.

The Teichmüller unipotent flow can be defined concretely on certain moduli spaces of singular flat surfaces by shearing polygonal presentations of the surfaces. Thurston's earthquake flow on moduli spaces of hyperbolic surfaces is more mysterious. Both flows have deep and important connections to other areas of mathematics.

In this expository survey we give a geometric account of the main ideas behind Mirzakhani's theorem relating these two flows. Our presentation avoids some technical prerequisites that featured in the original more analytic presentation.

INTRODUCTION

Ce recueil de quatre textes fait suite aux cours donnés à l'occasion d'une école d'été sur le thème « Teichmüller dynamics, mapping class groups and applications ». Nous avons choisi de présenter des textes originaux, sur des avancées récentes, ayant toujours comme motivation le lien entre la théorie de Teichmüller et la dynamique.

Nous avons souhaité donner une courte introduction au sujet, sans trop entrer dans les détails. La bibliographie comporte plusieurs références de textes de synthèses et nous invitons le lecteur intéressé à les consulter.

1. Billards et surfaces plates

Jouer au billard constitue un point d'entrée dans la théorie des surfaces plates. Les billards sont des systèmes dynamiques simples modélisant le mouvement rectiligne d'une particule se déplaçant à vitesse constante dans une région P du plan et soumise aux lois de Snell-Descartes lorsque celle-ci rencontre le bord de la table P. La géométrie du bord divise alors le monde de ces systèmes dynamiques en trois catégories, selon que la courbure de ∂P est positive, négative ou nulle [**65, 62, 51**]. Dans ce texte, nous nous intéresserons uniquement au troisième cas, lorsque P est un polygone connexe (pas nécessairement simplement connexe, ni même compact). Dans ce cas deux trajectoires parallèles vont le rester pendant « assez longtemps » : l'entropie du système est nulle et les techniques sous-jacentes à l'étude des billards polygonaux sont différentes de celles des billards convexes ou concaves. Sans entrer dans les détails, nous noterons le flot du billard par $\phi_t^\theta(x)$: position de la particule $x \in P$ au temps t lorsque celle-ci se déplace à vitesse constante dans la direction initiale $\theta \in \mathbb{S}^1$. Une fois encore, le monde des billards polygonaux se divise en deux : celui des billards rationnels et les autres. Un billard est rationnel si tous les angles formés par ses côtés sont des multiples rationnels de π. De manière équivalente chaque trajectoire du flot ne prend qu'un ensemble fini de directions. Les principales questions que l'on peut se poser sont toutes reliées au comportement des trajectoires à long terme, qui est un sujet fascinant en systèmes dynamiques. En voici quelques-unes, qui serviront de guide à cette introduction.

1. Les orbites de ϕ_t^θ sont-elles denses ? Uniformément distribuées ?
2. Existe-il des orbites périodiques ? Si oui, combien ?
3. Peut-on relier deux points quelconques par une trajectoire ?

Le cas le plus simple, et bien compris depuis longtemps, est celui du carré (et plus généralement lorsque P pave le plan). Le système dynamique associé est alors un flot uniforme sur un tore $\mathbb{T}^2$. Les billards irrationnels sont beaucoup plus compliqués à étudier et ne seront pas abordés dans ce texte. On pourra consulter par exemple **[71, 70]**. La théorie des billards rationnels a connu des développements profonds au début des années 80, notamment grâce aux travaux de H. Masur **[48]** et W. Veech **[67]**. Cela a continué avec A. Eskin et H. Masur **[22]** pour finalement culminer avec ceux de A. Eskin, M. Mirzakhani et A. Mohammadi **[23, 24]** en 2010. Pour énoncer ceux-ci, il est préférable de changer de point de vue.

Pourquoi les billards rationnels sont-ils plus simples à étudier que les autres billards polygonaux ? Une construction classique **[34, 76]** permet de développer une orbite du flot ϕ_t^θ : lorsque la trajectoire rencontre le bord de P, au lieu de réfléchir le vecteur des vitesses, on réfléchit la table P (voir Figure 1). On obtient ainsi plusieurs copies

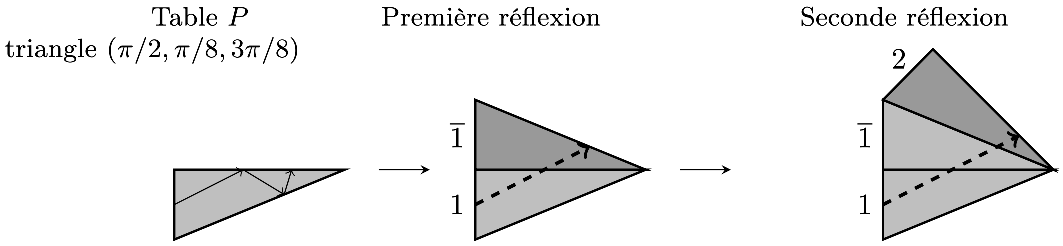

Figure 1. Réflection de la table de billard triangulaire P d'angles $(\pi/2, \pi/8, 3\pi/8)$ le long d'une trajectoire de ϕ_t^θ.

isométriques de P. La condition de rationalité se traduit alors par l'existence d'un nombre *fini* de telles copies (à translations près) que l'on recolle le long de leurs côtés par translations **[51]** (voir Figure 2). Cela produit une surface de Riemann X et une

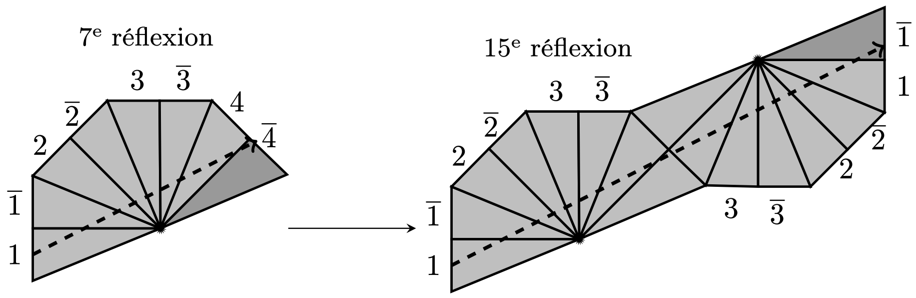

Figure 2. Dépliage d'une trajectoire de billard sur une surface de translation (X, ω).

métrique plate $i/2 \int \omega \wedge \overline{\omega}$ (ω est une $1-$forme holomorphe qui n'est rien d'autre que $\mathrm{d}z$ dans de bonnes coordonnées locales, voir Figure 3). Les orbites de ϕ_t^θ s'identifient alors à un champ de droites (pour la métrique plate) sur X.

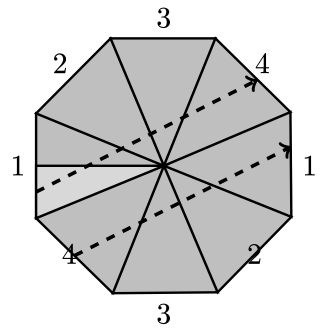

FIGURE 3. La même surface de translation $(X,\omega) \in \mathcal{M}_g$, ici $\omega = \mathrm{d}z$.

Un des outils fondamentaux en théorie des systèmes dynamiques est la renormalisation. Ce principe, dans le cadre des surfaces de translation, possède une interprétation géométrique magnifique donnée par le flot géodésique de Teichmüller. Pour évoquer celui-ci, il convient de considérer l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_g$ des surfaces de translation, et son quotient $\mathcal{M}_g$, l'espace de modules, par l'action du groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes préservant l'orientation. Ces espaces possèdent une action du groupe de Lie $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agissant par post-composition dans les cartes de (X,ω).

L'idée naïve du principe de renormalisation est d'envoyer une trajectoire verticale de longueur T du flot $\phi_t^{\pi/2}$ (sur X) sur une trajectoire verticale de longueur 1 du flot $\phi_t^{\pi/2}$ sur $g_t(X)$ où $g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ avec $t = 2\log(T)$. Ainsi comprendre une très longue trajectoire verticale sur X revient à comprendre une trajectoire de longueur 1 sur l'orbite $g_t(X)$. Ce changement de point de vue a l'avantage de permettre de faire de la géométrie. L'exemple le plus frappant est le critère de H. Masur [**49**] : si l'orbite $\{g_t(X)\}$ est récurrente dans $\mathcal{M}_g$ alors la trajectoire sur X est dense et uniformément distribuée.

Ce résultat illustre un concept mathématique important : pour étudier une classe d'objets, il est bien souvent plus facile d'étudier la dynamique dans leur espace de modules plutôt que ces objets individuellement. On retrouve naturellement cet adage dans toutes les approches récentes [**42, 50, 18, 79, 73**]. Mentionnons enfin que les deux approches originales et duales de construction d'espaces de modules utilisent la notion d'échanges d'intervalles [**67**] et de surfaces de Riemann [**48**]. Le parti pris de ces notes a été de privilégier plutôt la seconde. On pourra par exemple consulter [**75**] pour une présentation utilisant la notion d'échanges d'intervalles.

2. Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et rigidité

Les travaux de M. Ratner ont permis de bien comprendre la dynamique des flots unipotents dans le cadre des espaces homogènes [**59, 60**]. Un exemple typique de cette situation est celui où G est un groupe de Lie semi-simple, Γ un réseau de G, et $U \subset G$ est un sous-groupe unipotent à un paramètre agissant sur G/Γ par multiplication à gauche. Sous ces hypothèses très générales, toute mesure $U-$invariante est homogène : elle est $L-$invariante et supportée par une orbite fermée sous un sous-groupe fermé $U \subseteq L \subseteq G$. Il est donc possible de contrôler *toutes* les orbites : chaque adhérence d'orbite est un espace homogène G/L.

Une situation simple, qui révèle déjà toute la complexité et la beauté de cette rigidité, est l'action du sous-groupe à 1 paramètre $h_s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret de covolume fini dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (on dit dans ce cas que h_s est le flot horocyclique).

Dans notre situation, dès que $g \geq 2$, les espaces $\mathcal{M}_g$ ne sont pas du tout des espaces homogènes ! A. Eskin, M. Mirzakhani et A. Mohammadi [**23, 24**] ont néanmoins établi un théorème de rigidité pour l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: l'adhérence de *chaque* orbite dans $\mathcal{M}_g$ est une sous-variété affine. Les preuves mélangent des techniques subtiles que l'on retrouve aussi dans les travaux de Y. Benoist et J.-F. Quint [**5**]. Comme dans le cas des théorèmes de Ratner, on peut déduire de ce théorème de rigidité une multitude de corollaires stupéfiants de natures arithmétiques ou géométriques. À titre d'exemples, mentionnons une solution en moyenne au problème de comptage des orbites périodiques dans un billard : il existe une constante $c = c(P) > 0$ telle que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(P, e^s)e^{-2s}\, ds = c, \tag{1}$$

où $N(P, e^s) = \#\{\text{cylindres sur } P \text{ de longueur } \leq e^s\}$ (un cylindre est une collection d'orbites parallèles). La constante c est souvent appelée constante de Siegel-Veech [**68**]. Il existe aujourd'hui toute une artillerie de résultats pour la calculer [**20, 21**] (voir [**33**] pour un survol). On voudrait bien sûr avoir

$$\lim_{s\to\infty} N(P, e^s)e^{-2s} = c, \tag{2}$$

mais pour cela il faudrait démontrer un théorème analogue à [**23**] pour le flot horocyclique h_s. Nous reviendrons sur ce point dans le § 3. Notons tout de même que $\lim_{s\to\infty} N((X,\omega), s)s^{-2} = c$ pour presque toute surface de translation $(X,\omega) \in \mathcal{M}_g$ [**22**]. Nous renvoyons à [**8**] pour une discussion sur le terme d'erreur.

Dans toutes ces approches, on retrouve naturellement des questions de géométrie au bord de l'espace de modules. Tout cela est relié à un problème plus vaste : celui de la compactification de $\mathcal{M}_g$, mais qui ne sera pas abordé dans ce volume (on pourra consulter [**1**]).

Parmi les applications et les développements un peu plus récents, on peut mentionner les travaux de A. Wright [**73**], McMullen-Mukamel-Wright [**56**], Eskin-Filip-Wright [**19**] qui proposent des outils intéressants allant vers une classification de ces sous-variétés affines.

3. Action de h_s, rigide ou pas rigide ?

Nous avons vu que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_g$ possédait une certaine forme de rigidité. Mais qu'en est-il finalement de celle du flot unipotent h_s sur $\mathcal{M}_g$? C'est utile si on veut un résultat de comptage analogue à (2) pour *toute* surface (et donc aussi pour *tout* billard rationnel). De manière surprenante, ou pas, l'analogie avec les théorèmes de Ratner s'arrête là : il existe des surfaces de translation dont l'orbite sous h_s est une sous-variété *à bords* **[64]**. En fait ces orbites peuvent être considérablement plus méchantes, même dans $\mathcal{M}_2$. Il existe « beaucoup » (pour la topologie) de surfaces ayant une adhérence d'orbite avec une dimension de Hausdorff fractionnaire. Il existe aussi des orbites denses qui ne sont génériques pour aucune mesure **[12]**. L'idée clé est de décrire l'action de h_s sur la métrique plate de (X,ω) à l'aide de tremblements de terre (la nomenclature est inspirée de celle de W. Thurston et des « earthquake paths »). Cela illustre bien la relation, encore mystérieuse, entre la géométrie hyperbolique de la surface de Riemann X et la géométrie plate singulière (X,ω).

Ce point de vue avait déjà été abordé par M. Mirzakhani **[57]** pour l'étude du flot des tremblements de terre. On peut penser à ce flot comme une extension continue des twists le long de géodésiques simples fermées (dans les coordonnées de Fenchel-Nielsen). Pour comprendre cette analogie entre les deux géométries, il faut se placer au niveau des espaces de Teichmüller $\mathcal{T}_g$ et considérer les laminations mesurées $\mathcal{ML}_g$, et les feuilletages mesurés (voir par exemple **[47]**). En utilisant les coordonnées de décalage de Thurston-Bonahon-Fock-Penner **[66, 6, 7]** M. Mirzakhani **[57]** relie deux flots de natures *a priori* différentes : le flot de tremblement de terre sur l'espace des laminations mesurées et le flot horocyclique h_s sur les feuilletages mesurés. M. Mirzakhani démontre qu'il existe une bijection $\mathrm{Mod}(g)$-équivariante entre ces deux espaces qui conjugue les deux flots (ici $\mathrm{Mod}(g)$ désigne le groupe de difféotopies d'une surface de genre g). La première conséquence importante est l'ergodicité du flot de tremblement de terre. Combiné avec **[12]** cela permet d'obtenir des informations nouvelles sur celui-ci. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au texte d'A. Wright de ce recueil. Les techniques sont celles de la géométrie hyperbolique. Un problème est de définir une structure linéaire sur $\mathcal{ML}_g$ et de faire le lien avec les coordonnées des périodes. Les conséquences sont nombreuses : on peut citer par exemple la résolution du problème de réalisation de Nielsen par S. Kerckhoff **[45]**.

Nous mentionnons enfin une amélioration récente de ce théorème de conjugaison. Il existe une notion de strate sur l'espace de Teichmüller des différentielles quadratiques (surfaces de demi-translation) $\mathcal{QT}_g$ en regardant les angles coniques qui sont de type $(k_i+2)\pi$. La dimension réelle d'une strate de $\mathcal{QT}_g$ est alors $4g+2\sum k_i-4$. On peut définir par analogie une notion de strate sur $\mathcal{T}_g\times\mathcal{ML}_g$ en demandant que le complémentaire de la lamination soit une collection de $(k_i+2)-$gones idéaux. Les coordonnées sur ces espaces sont données respectivement par Dehn-Thurston d'un côté et Fenchel-Nielsen de l'autre côté. Le théorème de conjugaison de M. Mirzakhani **[57]** est valable pour des triangles idéaux ($k_i=1$) ce qui est la strate « générique ».

A. Calderon et J. Farre **[9]** ont récemment étendu cette bijection $\mathrm{Mod}(g)-$équivariante aux strates.

4. Surfaces à petits carreaux

Depuis les Égyptiens, on sait qu'une façon d'aborder un problème de géométrie est de le discrétiser. Un exemple typique est le problème du cercle de Gauss : pour calculer l'aire d'un disque de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ il suffit de compter le nombre de points à coordonnées entières dans un grand disque de rayon R. Dans notre situation, les points entiers de $\mathcal{M}_g$ sont les surfaces arithmétiques (souvent appelées surface à petits carreaux ou origamis). Il existe plusieurs définitions équivalentes de celles-ci :

1. Les périodes de (X, ω) sont entières,
2. (X, ω) est un revêtement ramifié (au dessus d'un seul point) d'un tore plat,
3. Le groupe affine de (X, ω) est commensurable à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$,
4. Le corps d'holonomie (ou le corps de trace) de (X, ω) est $\mathbb{Q}$.

Il existe d'autres définitions utilisant la théorie des groupes : on pourra consulter la thèse de D. Zmiaikou **[77]** qui dresse un panorama très complet des différents points de vue.

Cette approche combinatoire s'avère particulièrement fructueuse lorsqu'il s'agit de calculer des volumes d'espaces de modules. L'article **[78]** explique merveilleusement bien cette technique. On pourra consulter **[38, 39, 14]** qui effectuent des calculs très précis de ces volumes, notamment sur le comportement asymptotique lorsque le genre tend vers l'infini. Cette facette combinatoire des espaces de modules peut paraître naïve de prime abord. Il n'en est rien ! Par exemple ces objets interviennent de manière cruciale dans le calcul des constantes de Siegel-Veech **[22, 20, 21]**. En fait la combinatoire de ces objets simples se révèle extrêmement compliquée : la classification des $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})-$orbites est un problème important et non trivial. Il n'a été résolu que dans le cas du genre 2 avec une singularité conique **[41, 53]** et dans quelques variantes de celui-ci **[46]**. La technique qui entre en jeu ici provient de la géométrie algébrique, via la multiplication réelle. Quinze ans plus tard, même si des progrès ont été obtenus en genre 2 avec 2 singularités coniques **[16]**, la question de classification reste largement ouverte aujourd'hui.

Les applications des surfaces arithmétiques à la dynamique ou la géométrie des espaces de modules sont multiples **[61, 15]**. On pourra consulter le texte de C. Matheus dans ce recueil pour plus de détails, ainsi que son blog personnel **[52]** (qui contient aussi des explications très claires relatives aux autres textes de ce volume).

5. Surfaces K3 et analogies plates

Ce volume rend aussi compte d'une analogie entre la géométrie et la dynamique en dimension réelle et complexe 2. Dans **[28]**, S. Filip considère les surfaces K3 comme l'analogue complexe bidimensionnel des surfaces de translation (X, Ω), munies de leurs formes de Kähler $i/2\int \Omega\wedge\overline{\Omega}$. Une surface K3 est une surface complexe simplement connexe, munie d'une 2-forme holomorphe Ω sans zéro. Les deux exemples basiques sont les surfaces quartiques dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (les zéros $\{F=0\}\subset\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ d'un polynôme F de degré 4) et les exemples de Kummer : si $A=\mathbb{C}/\Lambda\times\mathbb{C}/\Lambda$ est un tore complexe (Λ est un réseau de $\mathbb{C}$) alors $X'=A/\{\pm\mathrm{Id}_A\}$ est une surface avec 16 points singuliers. En éclatant ces 16 points, on obtient une surface K3 avec $\Omega=dx\wedge dy$.

La généralisation naturelle des trajectoires du flot directionnel sur la surface de translation sont les sous-variétés lagrangiennes spéciales (SLag) $L\subset X$ vérifiant :

Pour les surfaces de translation, les sous-variétés de dimension 1 sont toutes lagrangiennes. De plus, comme localement $\Omega=dz$, spécial signifie horizontal dans la métrique plate. Quitte à tourner la métrique et à considérer $e^{i\theta}\Omega$, les sous-variétés lagrangiennes spéciales ne sont donc rien d'autres que les trajectoires de notre flot linéaire ϕ_t^θ sur X. De manière analogue, les fibrations lagrangiennes spéciales correspondent aux cylindres : familles de trajectoires périodiques horizontales sur X. Tout comme pour les surfaces de translation, une surface $K3$ typique n'admet pas de telle fibration. L'angle d'une fibration correspond à la notion de « twistor family ». Toujours motivé par le problème de comptage des trajectoires périodiques (2), dans le contexte des surfaces K3 on a le résultat suivant [**28**] : il existe $c>0$ et $\delta>0$ tels que

$$\#\left\{\theta\ \middle|\ \begin{array}{l}(X,e^{i\theta}\Omega)\text{ admet une fibration}\\ \text{SLag de volume }\leq V\end{array}\right\}=c\cdot V^{20}+\underset{V\to\infty}{O}(V^{20-\delta}).$$

Dans ce contexte, on peut même majorer le terme d'erreur : il est possible de prendre $\delta<\frac{4}{697633}\approx 6\cdot 10^{-6}$ [**28**, Appendice Bergeron-Matheus].

Il existe d'autres analogies entre les surfaces de translation et les surfaces K3, développées avant [**27, 28**], par S. Cantat [**10, 11**] et C. McMullen [**54, 55**] (on pourra aussi consulter le tableau « Lyapunov exponents for families » dans le texte de S. Filip de ce recueil). Pour les automorphismes hyperboliques des surfaces K3, S. Cantat a établi la notion de courants stable et instable, analogue des feuilletages stable et instable des homéomorphismes pseudo-Anosov. L'espace de Teichmüller des surfaces de translation $\mathcal{T}_g$ et le groupe modulaire peuvent être interprétés, du côté surfaces K3, comme un espace de périodes sur lequel un groupe arithmétique agit. Dans ce contexte, il est possible d'obtenir un analogue de la formule d'Eskin-Kontsevich-Zorich [**20, 21**] pour la somme des exposants de Lyapunov [**27**]. D'autres applications à la dynamique des automorphismes holomorphes des surfaces K3 apparaissent aussi dans [**30**]. Dans la direction contraire, il est possible d'utiliser ce dictionnaire et les techniques de dynamique pour produire des contre-exemples à des conjectures dans le monde K3 (par exemple sur la régularité de solutions à l'équation de Monge-Ampère [**29**]). On pourra là-aussi consulter le texte de S. Filip dans ce volume pour les détails.

6. Spectre de Ruelle

Enfin, ce volume rend compte d'une autre technique d'étude de la dynamique dans les espaces de modules au travers de l'analyse et de la théorie des représentations. Pour une application T définie par exemple sur une variété lisse X et préservant une mesure de probabilité μ, le mélange de T se traduit par le fait que les corrélations $c(f,g,n) = \int f \cdot g \circ T^n \,\mathrm{d}\mu$ convergent vers 0, pour des fonctions f et g assez lisses, de moyenne nulle : lorsque l'on itère la dynamique, on crée de plus en plus d'indépendance. Par exemple, lorsque T est très chaotique, $c(f,g,n)$ tend exponentiellement vite vers 0.

La propriété de mélange est spectrale : elle peut se caractériser au moyen de l'opérateur de transfert sur $L^2(\mu)$. Il est parfois possible d'obtenir les autres termes dans le développement asymptotique de $c(f,g,n)$, grâce au *spectre de Ruelle* de T. Ce spectre admet plusieurs définitions équivalentes. La plus parlante est la suivante, en termes de décorrélations. On demande qu'il existe un développement asymptotique, à un terme d'erreur près exponentiellement petit :

$$\int f \cdot g \circ T^n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{|\alpha_i| \geq \varepsilon} \sum_{j \leq N_i} \alpha_i^n n^j c_{i,j}(f,g) + o(\varepsilon^n).$$

L'ensemble discret de nombres complexes $(\alpha_i)_{i\in I}$ forme le spectre de Ruelle. En général f, g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X.

Cette définition est clairement intrinsèque, mais démontrer directement l'existence d'un tel spectre de Ruelle est un problème difficile en général. Toutes les preuves connues d'existence passent par la construction d'un bon espace de Banach $\mathcal{B}$, et font le lien entre les $(\alpha_i)_{i\in I}$ et les valeurs propres de l'opérateur de transfert agissant sur $\mathcal{B}$. Cette approche spectrale a été beaucoup développée et utilisée ces dernières années dans des contextes variés. On peut citer les travaux de Gouëzel-Liverani [**37**] pour les applications uniformément dilatantes, de F. Naud [**58**] pour des applications analytiques génériques dilatantes, de Dyatlov-Faure-Guillarmou [**17**] pour le flot géodésique sur une variété hyperbolique compacte, de Giulietti-Liverani [**35**] pour les dynamiques de type parabolique, de Baladi-Tsujii [**2, 3**], [**4**] pour les approches à base d'analyse de Fourier. Mentionnons enfin qu'il existe aussi une approche utilisant l'analyse microlocale (ou semiclassique) introduite par F. Faure, N. Roy et J. Sjöstrand [**26**]. Celle-ci a ensuite été utilisée par la « communauté semi-classique » en topologie [**13**] et en dynamique [**40**].

Afin d'être le plus complet possible, nous allons maintenant faire le lien avec le flot horocyclique. Nous avons vu que les travaux de M. Ratner donnaient des informations importantes sur l'action de h_s sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$. Un outil important pour l'étude des flots sur les espaces homogènes est donné par l'équation cohomologique. On dit que G est un cobord pour le flot ψ_t s'il existe une solution F (avec une certaine régularité) à l'équation

$$\frac{d}{dt} F \circ \psi_t|_{t=0} = G. \tag{3}$$

L'équation cohomologique apparaît dans plusieurs problèmes de dynamiques dans l'étude de mesures invariantes, de problèmes de conjugaison, de reparamétrages de flots, etc.

Récemment les méthodes venant de l'analyse spectrale [**2, 37, 35**] ont permis de donner des informations sur l'existence de solutions à l'équation (3), grâce à une version du théorème de Gottschalk-Hedlund. Réciproquement, connaissant les solutions à (3), il est possible de déduire des informations sur le spectre de Ruelle de ψ_t. Nous renvoyons à l'article de G. Forni dans le présent volume, ainsi qu'à [**31, 32**], pour plus de résultats dans le cadre du flot horocyclique sur une surface hyperbolique à courbure constante, ou celui des automorphismes partiellement hyperboliques du groupe de Heisenberg. On pourra aussi consulter [**25**] pour les homéomorphismes affine de type pseudo-Anosov sur une surface de translation.

7. Le présent volume

Comme mentionné au début de l'introduction, ce recueil concerne quatre textes originaux, sur des avancées récentes, ayant toujours comme motivation le lien entre la théorie de Teichmüller et la dynamique. Nous avons donc choisi de ne pas présenter les autres cours de l'école thématique de l'Institut Fourier (qui s'est déroulée du 11 au 22 juin 2018 à Grenoble) qui concernait la théorie maintenant « classique » des espaces de modules des surfaces de translation, et pour lesquels il existe aujourd'hui un nombre relativement important de survols (on pourra par exemple consulter [**33, 36, 43, 42, 50, 51, 62, 63, 69, 73, 74, 18, 44, 79, 65**]).

Le premier texte de Simion Filip concerne la dynamique et la géométrie des surfaces K3. Il existe une analogie entre la théorie de Teichmüller et les surfaces K3, qui est par exemple décrite dans un petit rapport d'A. Weil de 1979 [**72**, p. 390]. Motivé par ce lien, l'auteur propose ainsi une étude de ces surfaces complexes, principalement axée sur les automorphismes holomorphes (analogues des homéomorphismes pseudo-Anosov). Le texte présente plusieurs résultats sur la dynamique non-hyperbolique (construction d'automorphismes agissant par rotation sur un ensemble invariant ouvert, d'après McMullen, ou bien classification des mesures invariantes pour des groupes d'automorphismes suffisamment gros, d'après Cantat) ainsi que sur la dynamique hyperbolique (étude des courants invariants pour la mesure d'entropie maximale, d'après Cantat-Dupont).

Le second texte de Giovanni Forni concerne l'équation cohomologique et le spectre de Ruelle. Les équations cohomologiques apparaissent naturellement en systèmes dynamiques. Elles sont liées à des questions de linéarisation provenant de problèmes de conjugaison. Les premiers exemples, sur le tore, ont été abordés à l'aide de la théorie KAM. Ces résultats ont été généralisés aux flots sur les surfaces (par G. Forni en 1997) et aux échanges d'intervalles (par Marmi-Moussa-Yoccoz en 2005). Ce dernier aspect a été révolutionnaire puisque c'était la première fois qu'une solution de l'équation cohomologique était obtenue par des méthodes dynamiques pour des flots paraboliques « non-homogènes ». Depuis il existe des méthodes « classiques » données par l'analyse de l'opérateur de transfert permettant de résoudre l'équation cohomologique dans de nombreuses situations (ces méthodes ont été développées par Baladi, Gouëzel, Giulietti et Liverani). Ce texte explique comment obtenir de nombreuses informations sur cette équation cohomologique, à l'aide des résonances de Ruelle, pour le flot horocyclique sur les surfaces hyperboliques (courbure constante négative) et pour des automorphismes partiellement hyperboliques du groupe de Heisenberg.

Le troisième texte de Carlos Matheus concerne les surfaces à petits carreaux. Il existe plusieurs points de vue pour étudier ces surfaces. Celui choisi dans ce texte est la combinatoire. L'auteur propose de reformuler plusieurs résultats majeurs sur les exposants de Lyapunov en terme purement combinatoire. Cela permet par exemple d'énoncer une version « simple » de la formule d'Eskin-Kontsevich-Zorich sur la somme des exposants de Lyapunov, et d'obtenir plusieurs applications, maintenant classiques, comme le taux de diffusion pour certains modèles de wind–tree, revisitant au passage des résultats de Delecroix-Hubert-Lelièvre et Delecroix-Zorich.

Le dernier texte, d'Alex Wright, concerne le travail de M. Mirzakhani sur les tremblements de terre. Le flot horocyclique est un outil important en théorie de Teichmüller. Le point principal de ce texte est de présenter la connexion importante (ainsi qu'une preuve) entre ce flot d'une part, et le flot des tremblements de terre d'autre part.

Remerciements

En conclusion, nous espérons que cette école a répondu positivement à la demande de plus en plus forte de la part des jeunes (et des moins jeunes !) qui souhaitent s'investir dans la dynamique sur les espaces de modules et/ou comprendre les détails des dernières avancées. Nous espérons que ce recueil permettra de les aider. Nous remercions tous les orateurs pour leur travail de grande qualité ainsi que pour leur investissement : bien souvent les séances de TD ont fini la nuit (et recommencé tôt le matin...). Nous en profitons aussi pour remercier les auteurs qui ont beaucoup travaillé afin de rendre leurs notes publiables dans ce volume. Enfin c'est l'occasion d'adresser un remerciement spécial à l'équipe de l'Institut Fourier : Lindsay Bardou, Fanny Bastien, Céline Deleval, Christine Haccart, Géraldine Rahal et Ariane Rolland qui ont fait preuve (comme d'habitude !) d'une très grande compétence et surtout d'une infinie patience avec les organisateurs, et les participants.

Pierre Dehornoy et Erwan Lanneau
Institut Fourier

St Martin d'Hères, octobre 2019.

Références

[1] M. Bainbridge, D. Chen, Q. Gendron, S. Grushevsky & M. Möller – « Compactification of strata of Abelian differentials », *Duke Math. J.* **167** (2018), p. 2347–2416.

[2] V. Baladi – « Anisotropic Sobolev spaces and dynamical transfer operators : C^∞ foliations », in *Algebraic and topological dynamics*, Contemp. Math., vol. 385, Amer. Math. Soc., 2005, p. 123–135.

[3] ———, « The quest for the ultimate anisotropic Banach space », *J. Stat. Phys.* **166** (2017), p. 525–557.

[4] V. Baladi & M. Tsujii – « Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms », *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), p. 127–154.

[5] Y. Benoist & J.-F. Quint – « Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes », *Ann. of Math.* **174** (2011), p. 1111–1162.

[6] F. Bonahon – « The geometry of Teichmüller space via geodesic currents », *Invent. math.* **92** (1988), p. 139–162.

[7] ———, « Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **5** (1996), p. 233–297.

[8] C. Burrin, A. Nevo, R. Rühr & B. Weiss – « Effective counting for discrete lattice orbits in the plane via Eisenstein series », *Enseign. Math.* **66** (2020), p. 259–304.

[9] A. Calderon & J. Farre – « Shear-shape coordinates for Teichmüller space and applications to flat and hyperbolic geometry », prépublication `https://researchseminars.org/talk/BISTRO-Seminar/4/`, 2020.

[10] S. Cantat – « Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$ », *Acta Math.* **187** (2001), p. 1–57.

[11] ———, « Sur la dynamique du groupe d'automorphismes des surfaces $K3$ », *Transform. Groups* **6** (2001), p. 201–214.

[12] J. Chaika, J. Smillie & B. Weiss – « Tremors and horocycle dynamics on the moduli space of translation surfaces », prépublication arXiv:2004.04027.

[13] Y. Chaubet & N. V. Dang – « Dynamical torsion for contact Anosov flows », prépublication arXiv:1911.09931.

[14] V. Delecroix, E. Goujard, P. Zograf & A. Zorich – « Enumeration of meanders and Masur-Veech volumes », *Forum Math. Pi* **8** (2020), e4, 80.

[15] V. Delecroix, P. Hubert & S. Lelièvre – « Diffusion for the periodic wind-tree model », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **47** (2014), p. 1085–1110.

[16] E. Duryev – « Teichmüller Curves in Genus Two : Square-tiled Surfaces and Modular Curves », Thèse, Harvard University, 2018, p. 116.

[17] S. Dyatlov, F. Faure & C. Guillarmou – « Power spectrum of the geodesic flow on hyperbolic manifolds », *Anal. PDE* **8** (2015), p. 923–1000.

[18] A. Eskin – « Counting problems in moduli space », in *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, Elsevier B. V., 2006, p. 581–595.

[19] A. Eskin, S. Filip & A. Wright – « The algebraic hull of the Kontsevich-Zorich cocycle », *Ann. of Math.* **188** (2018), p. 281–313.

[20] A. Eskin, M. Kontsevich & A. Zorich – « Lyapunov spectrum of square-tiled cyclic covers », *J. Mod. Dyn.* **5** (2011), p. 319–353.

[21] ———, « Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **120** (2014), p. 207–333.

[22] A. Eskin & H. Masur – « Asymptotic formulas on flat surfaces », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), p. 443–478.

[23] A. Eskin & M. Mirzakhani – « Invariant and stationary measures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ action on moduli space », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **127** (2018), p. 95–324.

[24] A. Eskin, M. Mirzakhani & A. Mohammadi – « Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ action on moduli space », *Ann. of Math.* **182** (2015), p. 673–721.

[25] F. Faure, S. Gouëzel & E. Lanneau – « Ruelle spectrum of linear pseudo-Anosov maps », *J. Éc. polytech. Math.* **6** (2019), p. 811–877.

[26] F. Faure, N. Roy & J. Sjöstrand – « Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances », *Open Math. J.* **1** (2008), p. 35–81.

[27] S. Filip – « Families of K3 surfaces and Lyapunov exponents », *Israel J. Math.* **226** (2018), p. 29–69.

[28] ———, « Counting special Lagrangian fibrations in twistor families of K3 surfaces », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **53** (2020), p. 713–750.

[29] S. Filip & V. Tosatti – « Smooth and rough positive currents », *Ann. Inst. Fourier* **68** (2018), p. 2981–2999.

[30] ———, « Kummer rigidity for K3 surface automorphisms via Ricci-flat metrics », *Amer. J. Math.* **143** (2021), p. 1431–1462.

[31] L. Flaminio & G. Forni – « Invariant distributions and time averages for horocycle flows », *Duke Math. J.* **119** (2003), p. 465–526.

[32] G. Forni – « Sobolev regularity of solutions of the cohomological equation », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **41** (2021), p. 685–789.

[33] G. Forni & C. Matheus – « Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards », *J. Mod. Dyn.* **8** (2014), p. 271–436.

[34] R. H. Fox & R. B. Kershner – « Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron », *Duke Math. J.* **2** (1936), p. 147–150.

[35] P. Giulietti & C. Liverani – « Parabolic dynamics and anisotropic Banach spaces », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **21** (2019), p. 2793–2858.

[36] S. Gouëzel & E. Lanneau – « Un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie : unique ergodicité sur les surfaces plates », in *École de Théorie Ergodique*, Sémin. Congr., vol. 20, Soc. Math. France, 2010, p. 113–145.

[37] S. Gouëzel & C. Liverani – « Compact locally maximal hyperbolic sets for smooth maps : fine statistical properties », *J. Differential Geom.* **79** (2008), p. 433–477.

[38] E. Goujard – « Siegel-Veech constants for strata of moduli spaces of quadratic differentials », *Geom. Funct. Anal.* **25** (2015), p. 1440–1492.

[39] ———, « Volumes of strata of moduli spaces of quadratic differentials : getting explicit values », *Ann. Inst. Fourier* **66** (2016), p. 2203–2251.

[40] C. Guillarmou & B. Küster – « Spectral theory of the frame flow on hyperbolic 3-manifolds », *Ann. Henri Poincaré* **22** (2021), p. 3565–3617.

[41] P. HUBERT & S. LELIÈVRE – « Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathscr{H}(2)$ », *Israel J. Math.* **151** (2006), p. 281–321.

[42] P. HUBERT, H. MASUR, T. SCHMIDT & A. ZORICH – « Problems on billiards, flat surfaces and translation surfaces », in *Problems on mapping class groups and related topics*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., 2006, p. 233–243.

[43] P. HUBERT & T. A. SCHMIDT – « An introduction to Veech surfaces », in *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, Elsevier B. V., 2006, p. 501–526.

[44] A. KATOK & B. HASSELBLATT – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge Univ. Press, 1995.

[45] S. P. KERCKHOFF – « The Nielsen realization problem », *Ann. of Math.* **117** (1983), p. 235–265.

[46] E. LANNEAU & D.-M. NGUYEN – « Teichmüller curves generated by Weierstrass Prym eigenforms in genus 3 and genus 4 », *J. Topol.* **7** (2014), p. 475–522.

[47] G. LEVITT – « Foliations and laminations on hyperbolic surfaces », *Topology* **22** (1983), p. 119–135.

[48] H. MASUR – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 169–200.

[49] ______, « Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential », *Duke Math. J.* **66** (1992), p. 387–442.

[50] ______, « Ergodic theory of translation surfaces », in *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, Elsevier B. V., 2006, p. 527–547.

[51] H. MASUR & S. TABACHNIKOV – « Rational billiards and flat structures », in *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, North-Holland, 2002, p. 1015–1089.

[52] C. MATHEURS – « Disquisitiones mathematicae Matheus weblog », `https://matheuscmss.wordpress.com/`, 2020.

[53] C. T. MCMULLEN – « Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin », *Math. Ann.* **333** (2005), p. 87–130.

[54] ______, « K3 surfaces, entropy and glue », *J. reine angew. Math.* **658** (2011), p. 1–25.

[55] ______, « Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy », *Invent. math.* **203** (2016), p. 179–215.

[56] C. T. MCMULLEN, R. E. MUKAMEL & A. WRIGHT – « Cubic curves and totally geodesic subvarieties of moduli space », *Ann. of Math.* **185** (2017), p. 957–990.

[57] M. MIRZAKHANI – « Ergodic theory of the earthquake flow », *Int. Math. Res. Not.* **2008** (2008), Art. ID rnm116, 39.

[58] F. NAUD – « The Ruelle spectrum of generic transfer operators », *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **32** (2012), p. 2521–2531.

[59] M. RATNER – « On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups », *Acta Math.* **165** (1990), p. 229–309.

[60] ______, « Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows », *Duke Math. J.* **63** (1991), p. 235–280.

[61] G. SCHMITHÜSEN – « Examples for Veech groups of origamis », in *The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties*, Contemp. Math., vol. 397, Amer. Math. Soc., 2006, p. 193–206.

[62] J. Smillie – « The dynamics of billiard flows in rational polygons of dynamical systems », in *Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications*, Springer, 2000, p. 360–382.

[63] J. Smillie & B. Weiss – « Finiteness results for flat surfaces : a survey and problem list », in *Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow*, Fields Inst. Commun., vol. 51, Amer. Math. Soc., 2007, p. 125–137.

[64] ———, « Examples of horocycle-invariant measures on themoduli space of translation surfaces », in preparation, 2020.

[65] S. Tabachnikov – *Billiards*, Panoramas et Synthèses, vol. 1, Soc. math. de France, 1995.

[66] W. P. Thurston – « Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces », prépublication arXiv:math/9801039.

[67] W. A. Veech – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 201–242.

[68] ———, « Siegel measures », *Ann. of Math.* **148** (1998), p. 895–944.

[69] M. Viana – « Ergodic theory of interval exchange maps », *Rev. Mat. Complut.* **19** (2006), p. 7–100.

[70] Y. B. Vorobets – « Ergodicity of billiards in polygons : explicit examples », *Uspekhi Mat. Nauk* **51** (1996), p. 151–152.

[71] Y. B. Vorobets, G. A. Gal′perin & A. M. Stëpin – « Periodic billiard trajectories in polygons », *Uspekhi Mat. Nauk* **46** (1991), p. 165–166 ; English translation : *Russ. Math. Surv.* **46** (1991), p. 204–205.

[72] A. Weil – *Œuvres scientifiques/collected papers. II. 1951–1964*, Springer Collected Works in Mathematics, Springer, 2014.

[73] A. Wright – « Translation surfaces and their orbit closures : an introduction for a broad audience », *EMS Surv. Math. Sci.* **2** (2015), p. 63–108.

[74] ———, « From rational billiards to dynamics on moduli spaces », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **53** (2016), p. 41–56.

[75] J.-C. Yoccoz – « Échanges d'intervalles et surfaces de translation », Séminaire Bourbaki, vol. 2007/08, exposé n° 996, *Astérisque* **326** (2009), p. 387–409.

[76] A. N. Zemljakov & A. Katok – « Topological transitivity of billiards in polygons », *Mat. Zametki* **18** (1975), p. 291–300.

[77] D. Zmiaikou – « Origamis and permutation groups », Thèse, University Paris-Sud, Orsay, 2011, `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00648120/document`.

[78] A. Zorich – « Square tiled surfaces and Teichmüller volumes of the moduli spaces of abelian differentials », in *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, Springer, 2002, p. 459–471.

[79] ———, « Flat surfaces », in *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, Springer, 2006, p. 437–583.