Chapitre 6

Courbes paramétrées

6.1 Courbes d'équation $y = f(x)$

Pour étudier une courbe d'équation $y = f(x)$ (ou simplement étudier une fonction f), le schéma est le suivant :

- On commence par chercher l'ensemble de définition de la fonction f. Eventuellement, si la fonction est paire/impaire, périodique, on peut restreindre l'intervalle d'étude.
- On cherche si on peut prolonger f par continuité.
- On étudie la dérivabilité de f. La plupart des fonctions « en pratique » sont dérivables (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur leur ensemble de définition, mais attention, ça n'est pas toujours le cas (racine carrée, arcsin...). Si on a prolongé la fonction f, on étudie également la dérivabilité au(x) point(s) de prolongement.
- On étudie les variations de la fonction f (la plupart du temps en étudiant le signe de la dérivée).
- On cherche les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- On résume les deux étapes précédentes dans le tableau de variations de f.
- Eventuellement, on étudie les asymptotes obliques (s'il y en a).
- On trace la courbe. La courbe est un moyen de résumer graphiquement toutes les étapes précédentes. Il ne sert à rien de placer énormément de points pour la tracer. Il faut (et il suffit de) placer les éléments caractéristiques déterminés au cours de l'étude : on trace les asymptotes, on place les points où il y a des tangentes horizontales, des tangentes verticales, éventuellement quelques points particuliers (intersection avec les axes, ou les asymptotes), et on relie les points en tenant compte du tableau de variations. Eventuellement, si on a calculé l'équation d'une tangente, on la trace.

Remarques :

- La courbe doit être la courbe représentative d'une fonction, i.e il ne doit pas y avoir plusieurs points avec la même abscisse.
- Une courbe doit être tracée de manière précise et soignée.

Exemple : On étudie la courbe d'équation $y = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

6.2 Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

Dans la partie précédente, l'ordonnée était une fonction des abscisses : on avait $y = f(x)$. Une courbe paramétrée est une courbe dont l'abscisse et l'ordonnée sont toutes les deux des fonctions d'un paramètre t, i.e il s'agit d'une courbe dont l'équation est de la forme $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array}\right.$ où t est la variable.

Physiquement, cela s'interprète comme la trajectoire d'un point en fonction du temps : à tout temps t correspond une position $(f(t), g(t))$.

6.2.1 Étude des branches infinies

Soit $M : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \overline{I}$. On note $M = (x, y)$.

Définition. *On dit que M possède une* **branche infinie au voisinage de** *a si $\lim\limits_{t\to a} \|M(t)\| = +\infty$.*

Plusieurs cas sont possibles :

- **Premier cas :** seule l'une des deux limites $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ ou $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ est infinie (l'autre est finie).
  1. Si $\lim\limits_{t\to a} x(t) = m \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = m$ est appelée **asymptote** de M en a.
  2. Si $\lim\limits_{t\to a} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t) = m \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = m$ est appelée **asymptote** de M en a.
- **Second cas :** les deux limites $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ sont infinies.
  1. Si $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, on dit que M possède une **branche parabolique** dans la direction (Ox).
  2. Si $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, on dit que M possède une **branche parabolique** dans la direction (Oy).
  3. Si $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}$:
     (a) si $\lim\limits_{t\to a} \big(y(t) - mx(t)\big) = \pm\infty$, on dit que M possède une **branche parabolique** dans la direction $y = mx$;
     (b) si $\lim\limits_{t\to a} \big(y(t) - mx(t)\big) = p \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = mx + p$ est appelée **asymptote** de M en a.

6.2.2 Réduction du domaine d'étude

On considère toujours une courbe paramétrée donnée en coordonnées cartésiennes sur un intervalle réel I : $M = (x, y) : I \to \mathbb{R}^2$. La première étape de son étude consiste à reduire l'intervalle d'étude en s'appuyant sur une périodicité ou/et des symétries. Plusieurs cas sont possibles. La liste suivante n'est pas exhaustive.

1. **Cas où $I = \mathbb{R}$ et où x et y sont périodiques de période T :** alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t+T)$ coïncide avec le point $M(t)$. D'où

$$\boxed{\text{Etude sur un intervalle de longueur } T}$$

2. **Cas où I est symétrique par rapport à 0 et où x et y sont paires :** alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ coïncide avec le point $M(t)$. D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \mathbb{R}_+}$$

3. **Cas où I est symétrique par rapport à 0 et où x et y sont impaires :** alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à O. D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \mathbb{R}_+ \text{ puis symétrie par rapport à O}}$$

4. **Cas où I est symétrique par rapport à 0 et où x est paire et y est impaire :** alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à (Ox). D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \mathbb{R}_+ \text{ puis symétrie par rapport à (Ox)}}$$

5. **Cas où I est symétrique par rapport à 0 et où x est impaire et y est paire :** alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à (Oy). D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \mathbb{R}_+ \text{ puis symétrie par rapport à (Oy)}}$$

6. **Cas où I est symétrique par rapport à 0 et où $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$:** alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \mathbb{R}_+ \text{ puis symétrie par rapport à } y = x}$$

7. **Cas où I est symétrique par rapport à 0 et où $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$:** alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$. D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \mathbb{R}_+ \text{ puis symétrie par rapport à } y = -x}$$

8. **Cas où I est symétrique par rapport à $\frac{\alpha}{2}$ avec un certain réel α et où $x(\alpha - t) = x(t)$ et $y(\alpha - t) = y(t)$:** alors pour tout $t \in I$, le point $M(\alpha - t)$ coïncide avec le point $M(t)$. Or l'application $t \to \alpha - t$ est géométriquement la symétrie de $\mathbb{R}$ par rapport à $\frac{\alpha}{2}$. Lorsque t décrit $\left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right[$, $\alpha - t$ décrit quant à lui $\left]-\infty, \frac{\alpha}{2}\right]$. D'où

$$\boxed{\text{Etude sur } I \cap \left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right[}$$

6.2.3 Points singuliers

Propriété : *Si $\begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la tangente à la courbe au point de paramètre a est la droite qui passe par le point de coordonnées $(f(a), g(a))$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix}$. En particulier :*

- *Si $g'(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$, alors il y a une tangente horizontale à la courbe au point de coordonnées $(f(a), g(a))$.*
- *Si $f'(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, alors il y a une tangente verticale à la courbe au point de coordonnées $(f(a), g(a))$.*

Remarque : Si $f'(t_0) = 0$ et $g'(t_0) = 0$, alors le point de paramètre t_0 est dit stationnaire ou singulier. Pour décrire l'allure de la courbe, nous utilisons les DL des fonctions f et g au voisinage de t_0 (quand ils existent).

Notation : si $f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \cdots + a_n(t - t_0)^n + o((t - t_0)^n)$ et $g(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + \cdots + b_n(t - t_0)^n + o((t - t_0)^n)$, notons $e_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$, alors nous écrivons :

$$M(t) = e_0 + e_1(t - t_0) + \cdots + e_n(t - t_0)^n + o((t - t_0)^n).$$

En fait, si f et g sont suffisamment dérivables, nous obtenons une formule de Taylor-Young vectorielle :

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t - t_0)}{1!} M'(t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} M^{(n)}(t_0) + o((t - t_0)^n),$$

avec $M^{(k)}(t_0) = \begin{pmatrix} f^{(k)}(t_0) \\ g^{(k)}(t_0) \end{pmatrix}$.

Théorème. *Soient $m < n$ les plus petits entiers tels que les vecteurs $M^{(m)}(t_0)$ et $M^{(n)}(t_0)$ soient linéairement indépendants, alors l'allure des courbes au voisinage de $M(t_0)$ dépend de la parité de n et m :*

- *si m et n impairs, nous avons un point d'inflexion ;*
- *si m impair et n pairs, nous avons le cas standard ;*
- *si m pair et n impair, nous avons un point de rebroussement de 1ère espèce ;*
- *si m et n pair, nous avons un point de rebroussement de 2nde espèce.*

6.2.4 Etude pratique d'une courbe paramétrée

Le plan général est le suivant

- Détermination du domaine, des périodes et des symétries éventuelles ;
- Calcul de $x'(t)$ et de $y'(t)$, tableau de variations ;
- Etude des asymptotes ;
- Etude des points singuliers, calcul de quelques tangentes ;
- Détermination des points doubles ;
- Représentation graphique.

Exemple : Etude de la courbe

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{4}{t-1} \\ t + 1 + \frac{4}{(t-1)^2} \end{pmatrix}.$$