UN NOUVEL ALGORITHME POUR CALCULER LES PÉRIODES DES INTÉGRALES RATIONNELLES

JOURNÉES HOLONOMES
14 février 2014, Institut Fourier, Grenoble

PIERRE LAIREZ
Inria, Specfun

MOTIVATIONS

Sommes hypergéométriques

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$

$$\sum_{r\geqslant 0} \sum_{s\geqslant 0} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k}^4$$

avec Alin Bostan et Bruno Salvy

MOTIVATIONS

Physique théorique

$$\Phi(t) = \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w}{xyzw - tP}$$

avec $P = xyz + wxy^2z + w^2yz + z^2w^2y + z^2w^2 + wxy$
$+ x^2wy + y^2x + x^2y + x^2y^2 + y^2xz + w^2xz + w^2z$
$+ y^2wz + wyz + z^2w^2x + w^2xyz + wxz + wx^2yz + x^2yz$
$+ xy + wxyz^2 + z^2wx.$

- 210 intégrales de ce type, venant d'un article de Batyrev et Kreuzer,
- 73 déjà calculées,
- le nouvel algorithme fait le reste.

PÉRIMÈTRE D'UNE ELLIPSE

Proposition (Euler, 1733) — Soit $p(e)$ le périmètre d'une ellipse d'excentricité e et de demi grand-axe 1,

$$p(e) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x \propto \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)y^2}},$$

alors

$$(e-e^3)p'' + (1-e^2)p' + ep = 0.$$

PÉRIMÈTRE D'UNE ELLIPSE

Une preuve calculatoire

Proposition (Euler, 1733). $(e - e^3)p'' + (1 - e^2)p' + ep = 0.$

Démonstration

$$((e - e^3)\partial_e^2 + (1 - e^2)\partial_e + e) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)y^2}} \right) =$$

$$\partial_x \left(-\frac{e\left(-1-x+x^2+x^3\right)y^2\left(-3+2x+y^2+x^2\left(-2+3e^2-y^2\right)\right)}{\left(-1+y^2+x^2(e^2-y^2)\right)^2} \right)$$

$$+ \partial_y \left(\frac{2e\left(-1+e^2\right)x\left(1+x^3\right)y^3}{\left(-1+y^2+x^2(e^2-y^2)\right)^2} \right)$$

C'est ce type de calcul que l'on va étudier.

INTÉGRALES RATIONNELLES MULTIPLES

Problème

- $x_1, \ldots, x_n$, des variables d'intégration
- t, un paramètre
- $R(t, x_1, \ldots, x_n)$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$
- γ, un n-cycle dans $\mathbb{C}^n$

Calculer $L \in \mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ tel que

$$L \cdot \oint_\gamma R(t, x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 0.$$

Théorème (Picard, etc) — Ces intégrales vérifient des équations différentielles à coefficients polynomiaux.

INTÉGRALES RATIONNELLES MULTIPLES

Problème

- $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle avec une dérivation δ, usuellement $\mathbb{Q}(t)$
- $\mathbf{x} = x_0, \dots, x_n$, des variables d'intégration
- $R(\mathbf{x}) = a/f^q$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, homogène de degré $-n-1$

Calculer $L \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ tel qu'il existe des polynômes $b_0, \dots, b_n$ et un entier s tels que

$$L(R) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{b_i}{f^s}\right),$$

alias création télescopique.

Oubli du cycle d'intégration + homogénéisation + formulation algébrique

INTÉGRALES RATIONNELLES MULTIPLES

Problème

- $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle avec une dérivation δ, usuellement $\mathbb{Q}(t)$
- $\mathbf{x} = x_0, \ldots, x_n$, des variables d'intégration
- $R(\mathbf{x}) = a/f^q$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, homogène de degré $-n-1$

Calculer $L \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ tel qu'il existe des polynômes $b_0, \ldots, b_n$ et un entier s tels que

$$L(R)\mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^s}\right),$$

alias création télescopique.

Oubli du cycle d'intégration + homogénéisation + formulation algébrique

INTÉGRALES SIMPLES

Revenons en affine un instant…

$$R = \frac{a}{f^q} = \sum_{f(u)=0} \frac{r_u}{x-u} + \sum_{n>1} \sum_{f(u)=0} \frac{s_{u,n}}{(x-u)^n}$$

INTÉGRALES SIMPLES

Revenons en affine un instant…

$$R = \frac{a}{f^q} = \boxed{\sum_{f(u)=0} \frac{r_u}{x-u}} + \boxed{\sum_{n>1} \sum_{f(u)=0} \frac{s_{u,n}}{(x-u)^n}}$$

INTÉGRALES SIMPLES

Revenons en affine un instant…

$$R = \frac{a}{f^q} = \underbrace{\boxed{\sum_{f(u)=0} \frac{r_u}{x-u}}}_{\text{Forme réduite, notée } [R]} + \underbrace{\boxed{\sum_{n>1} \sum_{f(u)=0} \frac{s_{u,n}}{(x-u)^n}}}_{\partial_x(\cdots)}$$

INTÉGRALES SIMPLES

Revenons en affine un instant…

$$R = \frac{a}{f^q} = \boxed{\sum_{f(u)=0} \frac{r_u}{x-u}} + \boxed{\sum_{n>1} \sum_{f(u)=0} \frac{s_{u,n}}{(x-u)^n}}$$

Forme réduite, notée $[R]$

$\partial_x(\cdots)$

Proposition — Sont équivalents :

1. pour tout cycle γ, $\oint_\gamma R(x)\mathrm{d}x = 0$;
2. il existe une fraction $S(x)$, sans pôle autre que ceux de R telle que $R = \partial_x S$;
3. $[R] = 0$.

CALCUL DE LA FORME RÉDUITE

Algèbre linéaire

On résout

$$\frac{a}{f^q} = \frac{b}{f} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{c}{f^{q-1}}$$

$$\text{avec} \quad b \in k[x]_{<\deg f},\ c \in k[x]_{<\deg a}$$

C'est bien un système linéaire sur $\mathbb{K}$ et il admet une unique solution.
On a alors $[R] = b/f$.

CALCUL DE LA FORME RÉDUITE

Hermite, 1872

Algorithme — Par récurrence sur q :

$$[R] = \begin{cases} \left[\frac{u + \frac{1}{q-1}\partial_x v}{f^{q-1}}\right] & \text{avec } a = uf + v\partial_x f, \text{ si } q > 1, \\ \frac{r}{f} & \text{avec } qf + r = a, \text{ si } q = 1. \end{cases}$$

- Pour $q = 1$, $\frac{a}{f} = \frac{r}{f} + \frac{\partial \int q}{\partial x}$
- Pour $q > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{f^q} &= \frac{u}{f^{q-1}} + \frac{v\partial_x f}{f^q} \\ &= \frac{u}{f^{q-1}} + \frac{1}{q-1}\frac{\partial_x v}{f^{q-1}} - \frac{1}{q-1}\partial_x \frac{v}{f^{q-1}} \end{aligned}$$

INTÉGRALES SIMPLES

Algorithme

(Bostan, Chen, Chyzak, Li, 2010)

Entrée $R(x) = a/f^q$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$

Sortie $L \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ minimal tel que $L(R) = \partial_x(\cdots)$

procedure Hermite(R)
  $\rho_0 \leftarrow [R]$
  for i from 0 to ∞ **do**
    if $\operatorname{rang}_{\mathbb{K}}(\rho_0, \ldots, \rho_i) = i + 1$ **then**
      $\rho_{i+1} \leftarrow [\delta^{i+1}(R)]$
    else
      résoudre $\sum_{k=0}^{i-1} a_k \rho_k = \rho_i$ avec $a_0, \ldots, a_{i-1}$ dans $\mathbb{K}$
      return $\delta^i - \sum_{k=0}^{i-1} a_k \delta^k$

INTÉGRALES SIMPLES

Algorithme

(Bostan, Chen, Chyzak, Li, 2010)

Entrée $R(x) = a/f^q$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$

Sortie $L \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ minimal tel que $L(R) = \partial_x(\cdots)$

procedure Hermite(R)
 $\rho_0 \leftarrow [R]$
 for i from 0 to ∞ **do**
  if $\operatorname{rang}_{\mathbb{K}}(\rho_0, \ldots, \rho_i) = i+1$ **then**
   $\rho_{i+1} \leftarrow [\delta(\rho_i)]$
  else
   résoudre $\sum_{k=0}^{i-1} a_k \rho_k = \rho_i$ avec $a_0, \ldots, a_{i-1}$ dans $\mathbb{K}$
   return $\delta^i - \sum_{k=0}^{i-1} a_k \delta^k$

INTÉGRALES SIMPLES

Algorithme

(Bostan, Chen, Chyzak, Li, 2010)

Entrée $R(x) = a/f^q$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$

Sortie $L \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ minimal tel que $L(R) = \partial_x(\cdots)$

procedure Hermite(R)
  $\rho_0 \leftarrow [R]$
  for i from 0 to ∞ **do**
    if $\mathrm{rang}_{\mathbb{K}}(\rho_0, \ldots, \rho_i) = i + 1$ **then**
      $\rho_{i+1} \leftarrow [\delta(\rho_i)]$
    else
      résoudre $\sum_{k=0}^{i-1} a_k \rho_k = \rho_i$ avec $a_0, \ldots, a_{i-1}$ dans $\mathbb{K}$
      return $\delta^i - \sum_{k=0}^{i-1} a_k \delta^k$

FORMES DIFFÉRENTIELLES

Ω est la $\mathbb{K}(\mathbf{x})$ algèbre unitaire engendrée par les symboles $\mathrm{d}x_i$ et les relations $\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i$.

- En notant $\mathrm{d}\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$, $\Omega^{n+1} = \mathbb{K}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.
- En notant $\widehat{\mathrm{d}x_i} \overset{\text{def}}{=} (-1)^i \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n$, $\Omega^n = \oplus_{i=0}^n \mathbb{K}(\mathbf{x})\widehat{\mathrm{d}x_i}$.

Différentielle extérieure

- Pour $p \in \mathbb{K}(\mathbf{x})$, $\mathrm{d}p \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \partial_i p \, \mathrm{d}x_i$.
- Pour $\alpha \in \Omega^p$ et $\beta \in \Omega$, $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$.
- Pour $\alpha \in \Omega$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$.

En particulier

- $\mathrm{d}f \wedge \left(\sum_{i=0}^n b_i \, \widehat{\mathrm{d}x_i}\right) = \left(\sum_{i=0}^n b_i \, \partial_i f\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$
- $\mathrm{d}\left(\sum_{i=0^n} b_i \widehat{\mathrm{d}x_i}\right) = \left(\sum_{i=0}^n \partial_i b_i\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$

INTÉGRALES MULTIPLES

Théorème (de Rham, 1931) —
Soit $R(x_0, \ldots, x_n)$ une fraction rationnelle, homogène de degré $-n-1$.
Sont équivalents :

1. pour tout cycle $\gamma \in \mathbb{C}^{n+1}$ sur lequel R est continue $\oint_\gamma R(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$;
2. il existe une n-forme β sans pôle autre que ceux de R telle que $R(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\beta = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$;
3. ???

RECHERCHE D'UNE FORME NORMALE

On cherche à résoudre l'équation

$$\frac{a}{f^q} = \sum_{i=0}^{n} \partial_i \left(\frac{b_i}{f^{q+r-2}} \right).$$

RECHERCHE D'UNE FORME NORMALE

On cherche à résoudre l'équation

$$\frac{a}{f^q} = \frac{a'}{f^{q-1}} + \sum_{i=0}^{n} \partial_i \left(\frac{b_i}{f^{q+r-2}} \right).$$

RECHERCHE D'UNE FORME NORMALE

On cherche à résoudre l'équation

$$\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^q} = \frac{a'\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^{q-1}} + \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^{q+r-2}}\right),$$

avec β une n-forme polynomiale.

RECHERCHE D'UNE FORME NORMALE

On cherche à résoudre l'équation

$$\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^q} = \frac{a'\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^{q-1}} + \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^{q+r-2}}\right),$$

avec β une n-forme polynomiale.

- Pour contrôler les degrés, on se place en homogène.
- Dans la suite, $f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est un polynôme homogène,
- et $a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^q$ est une forme homogène de degré 0, c'est-à-dire que a est polynôme de degré $q \deg f - n - 1$.

RECHERCHE D'UNE FORME NORMALE

On cherche à résoudre l'équation

$$\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^q} = \frac{a'\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^{q-1}} + \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^{q+r-2}}\right),$$

avec β une n-forme polynomiale.

- Pour contrôler les degrés, on se place en homogène.
- Dans la suite, $f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est un polynôme homogène,
- et $a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^q$ est une forme homogène de degré 0, c'est-à-dire que a est polynôme de degré $q \deg f - n - 1$.

Questions

- Comment fixer r ?
- Existe-t-il toujours une solution pour q assez grand ?

IDÉE DE RÉDUCTION

On décompose $a\mathrm{d}\mathbf{x} = r\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}f \wedge \beta$, c.-à-d. $a = r + \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$.

- Réduction modulo l'idéal jacobien $(\partial_0 f, \ldots, \partial_n f)$, *via* une base de Gröbner

Réduction à la Hermite (intégration par parties)

Comme

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f^{q-1}}\right) = (1-q)\frac{\mathrm{d}f}{f^q}$$

IDÉE DE RÉDUCTION

On décompose $a\mathrm{d}\mathbf{x} = r\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}f \wedge \beta$, c.-à-d. $a = r + \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$.

- Réduction modulo l'idéal jacobien $(\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$, *via* une base de Gröbner

Réduction à la Hermite (intégration par parties)

Comme

$$\mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^{q-1}}\right) = (1-q)\frac{\mathrm{d}f \wedge \beta}{f^q} + \frac{\mathrm{d}\beta}{f^{q-1}}$$

IDÉE DE RÉDUCTION

On décompose $a\mathrm{d}\mathbf{x} = r\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}f \wedge \beta$, c.-à-d. $a = r + \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$.

- Réduction modulo l'idéal jacobien $(\partial_0 f, \ldots, \partial_n f)$, *via* une base de Gröbner

Réduction à la Hermite (intégration par parties)

Comme

$$\mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^{q-1}}\right) = (1-q)\frac{\mathrm{d}f \wedge \beta}{f^q} + \frac{\mathrm{d}\beta}{f^{q-1}}$$

on vérifie

$$\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^q} = \frac{r\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^q} + \frac{1}{q-1}\frac{\mathrm{d}\beta}{f^{q-1}} - \frac{1}{q-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{f^{q-1}}\right).$$

RÉDUCTION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

Réduction de Griffiths-Dwork

Calculer une base de Gröbner *GB* pour $(\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$
procedure $[\cdot](a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^q)$
  if $q = 1$ **then return** $a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^q$
  else
    Décomposer $a\mathrm{d}\mathbf{x}$ comme $r\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}f \wedge \gamma$ à l'aide de *GB*
    return $\dfrac{r\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^q} + \left[\frac{1}{q-1}\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{f^{q-1}}\right]$

On a bien $R\mathrm{d}\mathbf{x} = [R\mathrm{d}\mathbf{x}] + \mathrm{d}(\cdots)$ car

$$\frac{\mathrm{d}f \wedge \gamma}{f^q} = \frac{1}{q-1}\frac{\mathrm{d}\gamma}{f^{q-1}} - \frac{1}{q-1}\mathrm{d}\left(\frac{\gamma}{f^{q-1}}\right).$$

RÉDUCTION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

Hypothèse de lissité, formulations équivalentes :

- $V(f)$ est lisse dans $\mathbb{P}^n$;
- le quotient $k[\mathbf{x}]/(\partial_0 f, \ldots, \partial_n f)$ est de dimension finie ;
- pour toute n-forme β, si $\mathrm{d}f \wedge \beta = 0$, alors $\exists \gamma : \beta = \mathrm{d}f \wedge \gamma$;
- si $\sum_i b_i \partial_i f = 0$, alors il existe des polynômes $c_{i,j}$ tels que $b_i = \sum_j c_{i,j} \partial_j f$ et $c_{i,j} = -c_{j,i}$.

RÉDUCTION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

Hypothèse de lissité, formulations équivalentes :

- $V(f)$ est lisse dans $\mathbb{P}^n$;
- le quotient $k[\mathbf{x}]/(\partial_0 f, \ldots, \partial_n f)$ est de dimension finie ;
- pour toute n-forme β, si $\mathrm{d}f \wedge \beta = 0$, alors $\exists \gamma : \beta = \mathrm{d}f \wedge \gamma$;
- si $\sum_i b_i \partial_i f = 0$, alors il existe des polynômes $c_{i,j}$ tels que $b_i = \sum_j c_{i,j} \partial_j f$ et $c_{i,j} = -c_{j,i}$.

Théorème (de Rham, 1931, Griffiths, 1969) — Soit $R\mathrm{d}\mathbf{x} = \alpha / f^q$ une $(n+1)$-forme différentielle rationnelle homogène de degré nul. Si $V(f)$ est lisse, alors sont équivalents :

1. pour tout cycle γ de $\mathbb{C}^{n+1}$ l'intégrale $\oint_\gamma R\mathrm{d}\mathbf{x}$ s'annule ;
2. il existe une n-forme β sur $\mathbb{P}^n \setminus V(f)$ telle que $R\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\beta$;
3. $[R\mathrm{d}\mathbf{x}] = 0$.

De plus $[R\mathrm{d}\mathbf{x}]$ a un pôle d'ordre au plus n.

COMPLEXITÉ DU CALCUL DES PÉRIODES

- $R = \frac{a}{f}$, une fraction rationnelle en t et $x_1, \dots, x_n$;
- N, le degré de f par rapport à $\mathbf{x}$;
- d_t, $\max(\deg_t f, \deg_t a)$;
- pour simplifier, $\deg_{\mathbf{x}} a + n + 1 \leqslant N$;
- **pas d'hypothèse de régularité sur** f.

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy, 2013) — Une équation différentielle $L(t, \partial_t)$ pour $\oint R\mathrm{d}\mathbf{x}$ peut-être calculée en $\widetilde{\mathcal{O}}(e^{3n}N^{8n}d_t)$ opérations sur le corps de base, uniformément en tous les paramètres. L'équation calculée est d'ordre $\leqslant N^n$ et de degré $\mathcal{O}(e^n N^{3n} d_t)$.

Remarque — Si $L(t, \partial_t) \cdot R\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\beta$, alors β contient au moins $N^{n^2/2}$ coefficients si R est générique.

ISOMORPHISME EXPONENTIEL

Avec $\deg \beta = q \deg f$, comparer

$$\mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^q}\right) = \frac{\mathrm{d}\beta}{f^q} - q\frac{\mathrm{d}f \wedge \beta}{f^{q+1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(\beta\, e^{-f}) = \mathrm{d}\beta\, e^{-f} - \mathrm{d}f \wedge \beta\, e^{-f}.$$

Définition — poids de $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \deg \beta / \deg f$.

Théorème (Dimca, 1990) — Soit α une $(n+1)$-forme de degré $q \deg f$. Sont équivalents :

1. il existe β polynomial de poids s tel que $\alpha / f^q = \mathrm{d}\left(\beta / f^s\right)$;
2. il existe β polynomial de poids s tel que $\alpha\, e^{-f} = \mathrm{d}\left(\beta\, e^{-f}\right)$.

ISOMORPHISME EXPONENTIEL

Avec $\deg \beta = q \deg f$, comparer

$$\mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^q}\right) = \frac{\mathrm{d}\beta}{f^q} - q\frac{\mathrm{d}f \wedge \beta}{f^{q+1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(\beta\, e^{-f}) = \mathrm{d}\beta\, e^{-f} - \mathrm{d}f \wedge \beta\, e^{-f}.$$

Définition — poids de $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \deg \beta / \deg f$.

Théorème (Dimca, 1990) — Soit α une $(n+1)$-forme de degré $q \deg f$. Sont équivalents :

1. il existe β polynomial de poids s tel que $\alpha / f^q = \mathrm{d}(\beta / f^s)$;
2. il existe β polynomial de poids s tel que $\alpha = D_f \beta$.

On pose $D_f = e^f \cdot \mathrm{d} \cdot e^{-f}$, c'est-à-dire $D_f \alpha = \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}f \wedge \alpha$.

ISOMORPHISME EXPONENTIEL

Reformulation du problème

Soit α une $(n+1)$-forme de poids q, pour un certain q.
On cherche à résoudre l'équation

$$\alpha = \alpha' + D_f(\beta),$$

avec

- α' de poids $\leqslant q-1$,
- β une n-forme de poids $\leqslant q+r-2$.

Questions

- Comment fixer r ?
- Existe-t-il toujours une solution pour q assez grand ?

GRIFFITHS, FORME EXPONENTIELLE

Si $\alpha = \mathrm{d}f \wedge \beta$, alors $\alpha = \mathrm{d}\beta - D_f(\beta)$.

$$[\mathrm{d}f \wedge \beta] \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{d}\beta].$$

Si r est sous forme réduite modulo $(\partial_0 f, \ldots, \partial_n f)$,

$$[r\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}f \wedge \beta] \stackrel{\text{def}}{=} r\mathrm{d}\mathbf{x} + [\mathrm{d}\beta].$$

Théorème (Griffiths) — Si $V(f)$ est lisse, alors

1. pour toute $(n+1)$-forme polynomiale de poids q, la réduction $[\alpha]$ est de poids au plus n ;
2. pour toute n-forme β polynomiale, $[D_f\beta] = 0$.

CAS SINGULIER

Problème — Si $V(f)$ n'est pas lisse, il existe *plein* de β tels que $[D_f \beta] \neq 0$.

Idées

- calcul récursif de tous les $[D_f \beta]$;
- recycler la réduction de Griffiths, car son implémentation est efficace.

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.
C_p^q, l'espace des p-formes polynomiales de poids q

$$\begin{array}{ccc} q & C_{n+1}^{q} & \\ & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}f} & \\ q-1 & C_n^{q-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} & C_{n+1}^{q-1} \end{array}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.

$$\mathrm{d}f \wedge \beta \overset{1}{\longmapsto} \mathrm{d}\beta$$

$$\begin{array}{cccc} q & \mathrm{d}f \wedge \beta & & \\ & \uparrow \mathrm{d}f & & \\ q-1 & \beta & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \mathrm{d}\beta \end{array}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.

$$0 \xmapsto{1} \mathrm{d}\beta$$

$$\begin{tikzcd} q & 0 & \\ q-1 & \beta \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{d}\beta \end{tikzcd}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.

$$\mathrm{d}\beta \overset{2}{\longmapsto} 0$$

$$\begin{tikzcd}
q & 0 & \\
q-1 & \beta \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{d}\beta
\end{tikzcd}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.

$$\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}f \wedge \beta'$$

$$\begin{tikzcd}
q & 0 & \\
q-1 & \beta \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & 0 \\
q-2 & & \beta' \arrow[u, "\mathrm{d}f"]
\end{tikzcd}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.

$$\mathrm{d}f \wedge \beta' \xmapsto{1} \mathrm{d}\beta' \qquad \mathrm{d}\beta \xmapsto{2} 0$$

$$\begin{tikzcd}
q & 0 & & \\
q-1 & \beta \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & 0 & \\
q-2 & & \beta' \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{d}\beta'
\end{tikzcd}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

On définit une famille de réduction généralisant la réduction de Griffths.

$$\mathrm{d}\beta' \overset{3}{\longmapsto} 0$$

$$\begin{tikzcd}
q & 0 & & \\
q-1 & \beta \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & 0 & \\
q-2 & & \beta' \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{d}\beta'
\end{tikzcd}$$

ÉLAGAGE

Définitions

- $B_1^q \overset{\text{def}}{=} \left\{ \mathrm{d}f \wedge \beta - \mathrm{d}\beta \,\middle|\, \beta \in C_n^{q-1} \right\}$
- $B_2^q \overset{\text{def}}{=} B_1^q + B_1^{q+1} \cap C_{n+1}^q = B_1^q + \{\mathrm{d}\beta \mid \beta \in C_n^q, \mathrm{d}f \wedge \beta = 0\}$
- $\mathrm{Syz}_q \overset{\text{def}}{=} \{\beta \in C_n^q \mid \mathrm{d}f \wedge \beta = 0\}$
- $\mathrm{tSyz}_q \overset{\text{def}}{=} \left\{ \mathrm{d}f \wedge \gamma \,\middle|\, \gamma \in C_{n-1}^{q-1} \right\} \subset \mathrm{Syz}_q$

Proposition — Si A engendre $\mathrm{Syz}_q \,/\, \mathrm{tSyz}_q$ alors $B_2^q = B_1^q + \mathrm{d}A$.
Corollaire — Si $V(f)$ est lisse, alors $[\,]_1 = [\,]_r$ pour tout $r \geqslant 1$. En particulier $[D_f\beta]_1 = 0$ pour tout β.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

$$
\begin{tikzcd}
q & 0 & \\
q-1 & \beta \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{d}\beta \\
q-2 & \gamma \arrow[u, "\mathrm{d}f"] &
\end{tikzcd}
$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

$$
\begin{tikzcd}
q & 0 & \\
q-1 & \mathrm{d}f\wedge\gamma \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{d}(\mathrm{d}f\wedge\gamma) \\
q-2 & \gamma \arrow[u, "\mathrm{d}f"] &
\end{tikzcd}
$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

$$\begin{tikzcd}
q & & 0 & \\
q-1 & & 0 \arrow[u, "\mathrm{d}f"] \arrow[r, "\mathrm{d}"] & -\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\gamma \\
q-2 & & -\gamma \arrow[r, "\mathrm{d}"] & -\mathrm{d}\gamma \arrow[u, "\mathrm{d}f"]
\end{tikzcd}$$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

Algorithme

- $[\,]_1^q$ est la réduction de Griffiths, du poids q à $q-1$.

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

Algorithme

- $[\,]_1^q$ est la réduction de Griffiths, du poids q à $q-1$.
- $B_2^q \overset{\text{def}}{=} \{[\mathrm{d}\beta]_1^q \mid \beta \in \text{base de } \mathrm{Syz}_q \,/\, \mathrm{tSyz}_q\}$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

Algorithme

- $[\,]_1^q$ est la réduction de Griffiths, du poids q à $q-1$.
- $B_2^q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ [\mathrm{d}\beta]_1^q \mid \beta \in \text{base de } \mathrm{Syz}_q \,/\, \mathrm{tSyz}_q \right\}$
- Calcul efficace par bases de Gröbner

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

Algorithme

- $[\,]_1^q$ est la réduction de Griffiths, du poids q à $q-1$.
- $B_2^q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ [\mathrm{d}\beta]_1^q \mid \beta \in \text{base de } \mathrm{Syz}_q \,/\, \mathrm{tSyz}_q \right\}$
- Calcul efficace par bases de Gröbner
- $B_{r+1}^q \stackrel{\text{def}}{=} B_r^q + \left\{ [\alpha]_1^q \;\middle|\; \alpha \in B_r^{q+1} \cap C_{n+1}^q \right\}$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

Algorithme

- $[\,]_1^q$ est la réduction de Griffiths, du poids q à $q-1$.
- $B_2^q \overset{\text{def}}{=} \{[\mathrm{d}\beta]_1^q \mid \beta \in \text{base de } \mathrm{Syz}_q \,/\, \mathrm{tSyz}_q\}$
- Calcul efficace par bases de Gröbner
- $B_{r+1}^q \overset{\text{def}}{=} B_r^q + \left\{[\alpha]_1^q \,\middle|\, \alpha \in B_r^{q+1} \cap C_{n+1}^q\right\}$

RÉDUCTION D'ORDRE SUPÉRIEUR

Algorithme

- $[\,]_1^q$ est la réduction de Griffiths, du poids q à $q-1$.
- $B_2^q \overset{\text{def}}{=} \{[\mathrm{d}\beta]_1^q \mid \beta \in \text{base de } \mathrm{Syz}_q \,/\, \mathrm{tSyz}_q\}$
- Calcul efficace par bases de Gröbner
- $B_{r+1}^q \overset{\text{def}}{=} B_r^q + \left\{[\alpha]_1^q \,\middle|\, \alpha \in B_r^{q+1} \cap C_{n+1}^q\right\}$

Définition

Soit $\alpha \in C_{n+1}^q$. Il existe un plus petit $\alpha' \in C_{n+1}^q$ (pour un ordre monomial) tel que

$$[\alpha]_1^q \equiv \alpha' \mod B_r^q.$$

On définit

$$[\alpha]_r^q \overset{\text{def}}{=} \alpha' + [\alpha - \alpha']_r^{q-1}.$$

DÉGENERESCENCE

Proposition — Soit β une n-forme. Il existe un r tel que $[D_f\beta]_r = 0$.

Théorème (Dimca) — Il existe un r tel que pour toute n-forme β, on ait $[D_f\beta]_r = 0$.

La borne n'est pas facile à calculer (résolution des singularités, ou polynôme de Bernstein-Sato).
Dimca conjecture que $r = n + 1$ convient.

L'ALGORITHME

Entrée $R = a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^q$ une forme homogène de degré 0

Sortie Une équation de Picard-Fuchs pour R

```
procedure PicardFuchs(R)
    for r de 1 à ∞ do
        ρ_0 ← [a dx]_r                    ▷ Calculer les espaces B_r^q au besoin.
        for i de 0 à ∞, tant que deg ρ_i ⩽ n deg f do
            if rang_K(ρ_0, ..., ρ_i) = i + 1 then
                ρ_{i+1} ← [δ(ρ_i)]_r
            else
                résoudre Σ_{k=0}^{i-1} a_k ρ_k = ρ_i avec a_0, ..., a_{i-1} dans K
                return δ^i − Σ_k a_k δ
```