- Supposons que $(I(X_n))_n$ n'est pas majorée. Pour tout $M > 0$, il existe n_0 tel que $I(X_{n_0}) \geq M$. Par croissance de I, on a donc que pour tout $X \in [X_{n_0}, b[$, $I(X) \geq M$. Cela montre que $I(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers b_-.

$\square$

Proposition 7.13. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $m \in [a, b[$ tel que*

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \textit{pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.
Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.

Proposition 7.14. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in]a, +\infty]$. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues par morceaux sur* $[a, b[$ *et telles qu'il existe* $m \in [a, b[$ *tel que*

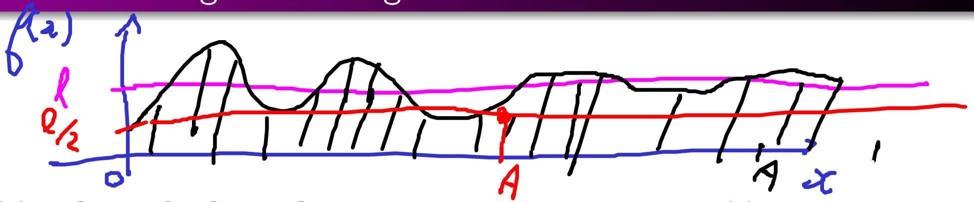
$$g(x) \geq 0 \ \text{ et } \ f(x) \geq 0 \quad \text{ pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Supposons que $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \to b^-$, *alors les intégrales impropres* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *et* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *ont même nature.*

Supposons que $f(x) = o(g(x))$ *ou que* $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ *quand* $x \to b^-$. *Alors si l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge,* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge aussi et si* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *converge,* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge aussi.*

Démonstration : La stratégie est la même que pour les séries. Il suffit de montrer que l'équivalence, ou le petit ou grand o implique un encadrement, et ensuite d'appliquer le principe de comparaison précédent. Par exemple, si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$, alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [b - \delta, b[$, $\frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq 2f(x)$. □

Limite et convergence d'intégrale



(1) $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue par morceaux telle que $f(t) \to l$ quand $t \to +\infty$ avec $l > 0$ ou $l = +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

(2) Trouver $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue par morceaux telle que g n'a pas de limite en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

(1) Puisque $f(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} l$ on a

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \quad t \geq A \Rightarrow f(t) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

En particulier (avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$)
il existe A tq $t \geq A \Rightarrow f(t) \geq \ell - \frac{\ell}{2}$
$= \frac{\ell}{2}$

Donc, pour $x \geq A$, on a

$$\int_A^x f(t)\,dt \geq \int_A^x \frac{\ell}{2}\,dt = (x-A)\frac{\ell}{2}$$

Donc $\displaystyle \int_A^x f(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\displaystyle \int_0^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^A f(t)\,dt}_{\text{constant}} + \underbrace{\int_A^x f(t)\,dt}_{\to +\infty}$ tend vers $+\infty$

$$\int_0^x \cos(t)\,dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^x$$

$$= \sin(x) - \sin(0)$$

$$= \sin(x)$$

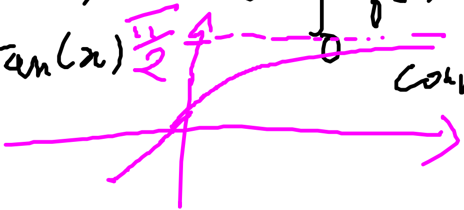
n'a pas de limite quand $x \to \infty$

Donc $\int_0^{+\infty} \cos(t)\,dt$ diverge

$$f(x) = |\cos(x)|$$

$$= |\tan(x)|$$

$$= \arctan(x)$$



① f n'a pas de limite en $+\infty$

② $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

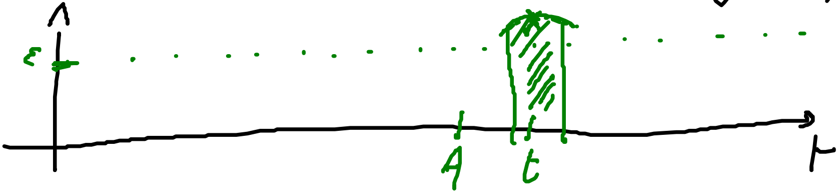
$$\int_{n\pi+\pi/2}^{(n+1)\pi+\pi/2} |\cos(t)|\,dt = \int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(t)|\,dt = a > 0$$

Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{(N+1)\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|dt = Na \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$

Donc $\displaystyle\int^{+\infty} |\cos(t)|dt$ diverge

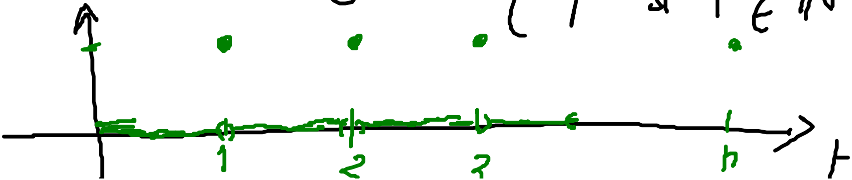
On veut $g : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$
qui n'a pas de limite en $+\infty$
En particulier g ne tend pas vers 0

Donc il existe $\varepsilon > 0$, tq pour tout A, il existe $t > A$ $g(t) \geq \varepsilon$



. On veut que g soit continue par morceaux

par exemple $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } t \in \mathbb{N} \end{cases}$



· g n'a pas de limite en $+\infty$

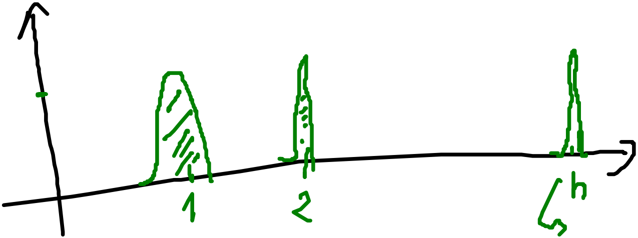
mais $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^2 g(t)\,dt + \dots + \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} g(t)\,dt$

$= 0 + 0 + \dots + 0$

$= 0$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge (et vaut 0)

si on voulait g continue



$\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n^2}$

⚠ Même si $a_n > 0$ on peut avoir $\sum a_n$ converge

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}\,dx, \qquad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}\,dx, \qquad a_n = u_n + v_n.$$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$a_n = \frac{1}{n^2}$

(1) $\left(\sum a_n\right)$ diverge :

On a $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$ donc

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{1+x}\,dx + \cdots + \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^{(N+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \left[\ln(1+x)\right]_0^{(N+1)\pi} = \ln(1+(N+1)\pi)$$

... w_n

ou aussi $a_n = \left[\ln(1+x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \ln(1+(n+1)\pi) - \ln(1+n\pi)$

$= w_{n+1} - w_n$

série téléscopique

...

Donc $\sum_{n=0}^{N} a_n \to +\infty$ quand $N \to \infty$.
Autrement dit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(2) $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2\pi n^2}$:
On sait que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

$$
\begin{aligned}
u_n - v_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(2x)}{1+x} dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{1+x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2} dx
\end{aligned}
$$

en utilisant $\int u'v = [uv] - \int uv'$, où $u' = \cos(2x)$, $u = \frac{1}{2}\sin(2x)$, $v = \frac{1}{1+x}$.

$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$
pour $C =$ constante

Feuille 5 - Ex.8

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x} dx$

...

Donc

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$|u_n - v_n| \le \frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(2x)|}{(1+x)^2}dx \le \frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{(1+n\pi)^2}dx$$

$$\le \frac{1}{2}((n+1)\pi - n\pi)\frac{1}{(1+n\pi)^2} \le \frac{1}{2}\pi\frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{1}{2\pi n^2}$$

on a $n\pi \le x \le (n+1)\pi$

donc $1 + x \ge 1 + n\pi$

$\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+n\pi}$

aussi $\int \frac{|\sin(2x)|}{(1+x)^2}dx \le \int \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]$

$=$ etc...

(3) Posons $b_n = u_n - v_n$.
Puisque $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ est une série convergente à termes positifs, on déduit par le théorème de comparaison que $\left(\sum b_n\right)$ est absolument convergente.

(série de Riemann)

Comme $v_n = u_n - b_n$, si $(\sum u_n)$ était aussi convergente, on obtiendrait que $(\sum v_n)$ est convergente, puis que $(\sum(u_n + v_n))$ aussi est convergente. On a vu au contraire que cette série diverge ; donc $(\sum u_n)$ diverge.

$= a_n$

En utilisant $u_n = v_n + b_n$ on déduit de même que $(\sum v_n)$ diverge.

Feuille 5 - Ex.8

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x} dx$

(4) $f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha}$. Convergence de $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$.
Notons que f_α est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Donc intégrable dans $[0,x]$ pour tout $x \geq 0$

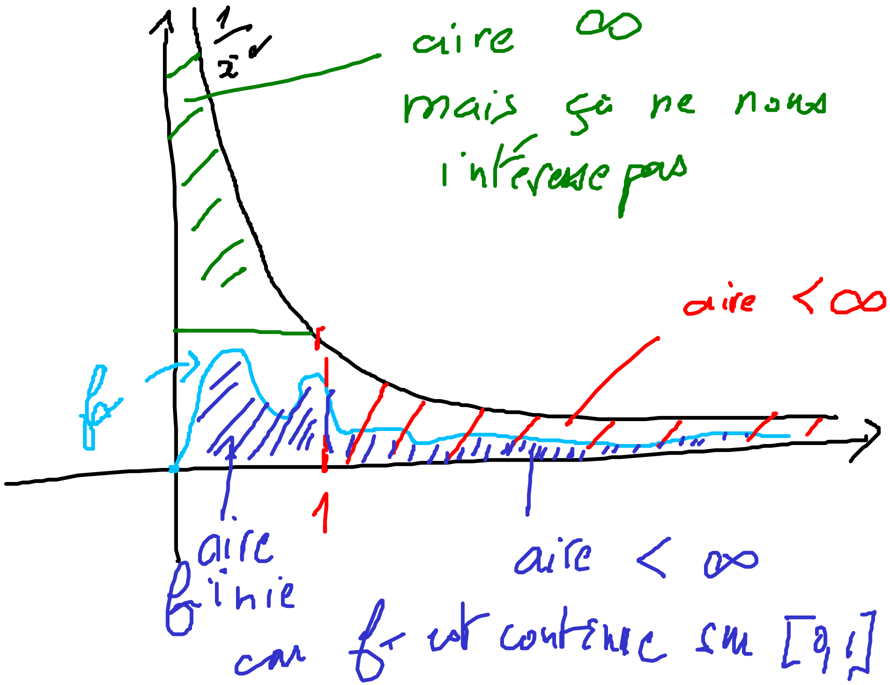
Pour $\alpha = 1$ on a $\int_0^{N\pi} f_1(x)dx = \sum_{n=0}^{N-1} v_n$. Comme $(\sum v_n)$ diverge on déduit que $\int_0^{+\infty} f_1(x)dx$ diverge.

Pour $\alpha > 1$ on a $0 \leq f_\alpha(x) \leq \frac{1}{(1+x)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$.
On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge.
Donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge. Donc $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge aussi.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge mais f_α est continue sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ est défini

Pour $\alpha \leq 1$ et $x \geq 0$ on a $(1 + x)^\alpha \leq (1 + x)$. Donc
$f_\alpha(x) \geq f_1(x) \geq 0$.
Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives et par le cas $\alpha = 1$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.



$\frac{1}{x^\alpha}$
aire ∞
mais ça ne nous intéresse pas
aire < ∞
f
1
aire finie
aire < ∞
car f est continue sur [0,1]