- Supposons que $(I(X_n))_n$ n'est pas majorée. Pour tout $M > 0$, il existe n_0 tel que $I(X_{n_0}) \geq M$. Par croissance de I, on a donc que pour tout $X \in [X_{n_0}, b[$, $I(X) \geq M$. Cela montre que $I(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers b_-.

□

Proposition 7.13. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in]a, +\infty]$. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues par morceaux sur* $[a, b[$ *et telles qu'il existe* $m \in [a, b[$ *tel que*

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \textit{pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *est convergente, alors l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *l'est aussi.*
Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *est divergente, alors l'intégrale* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *l'est aussi.*

Proposition 7.14. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $m \in [a, b[$ tel que*

$$g(x) \geq 0 \ \textit{ et } \ f(x) \geq 0 \quad \textit{ pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Supposons que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$, alors les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ ont même nature.

Supposons que $f(x) = o(g(x))$ ou que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quand $x \to b^-$. Alors si l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi et si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

Démonstration : La stratégie est la même que pour les séries. Il suffit de montrer que l'équivalence, ou le petit ou grand o implique un encadrement, et ensuite d'appliquer le principe de comparaison précédent. Par exemple, si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$, alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [b - \delta, b[$, $\frac{1}{2} f(x) \leq g(x) \leq 2 f(x)$. $\square$

Feuille 5 - Ex.4
Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$

Posons $f(x) = \frac{\ln x}{x+e^{-x}}$. La fonction f est définie et continue sur $[1, +\infty[$.
On a aussi $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Pour $x \geq e$ on a $\ln x \geq \ln e = 1$ et $e^{-x} \leq 1 \leq e \leq x$.
Donc $f(x) \geq \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2x} \geq 0$.

$f(x) \geqslant \frac{1}{x+e^{-x}} \geqslant \frac{1}{2x}$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente.

Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$ diverge.

Autre solution

$e^{-x} = o(x)$ quand $x \to +\infty$

(par comparaison polynôme/exponentielle)

Donc $x + e^{-x} \sim x$ quand $x \to +\infty$

Donc $\dfrac{\ln(x)}{x+e^{-x}} \sim \dfrac{\ln(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$$

Donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ diverge

Par le thm de comparaison de $f \geq 0$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

Feuille 5 - Ex.4
Nature de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$

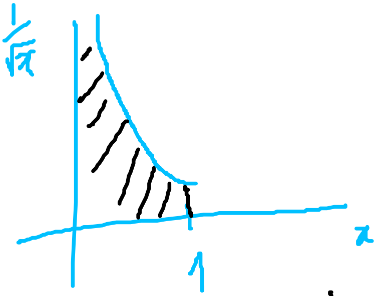
Posons $f(x) = \frac{\ln x}{x+e^{-x}}$. La fonction f est définie et continue sur $]0,1]$.
On a aussi $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$.

Quand $x \to 0$ on a $x + e^{-x} \to 1$.
Donc $f(x) \sim \ln x$ quand $x \to 0$.

On sait que $\int_0^1 \ln x \, dx$ converge.

Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions négatives, on en déduit que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$ converge.

Et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$? : diverge. car elle est divergente en $+\infty$



$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x} \Big]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 2$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

Feuille 5 - Ex.4
Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Posons $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. La fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
On a aussi $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

On va étudier séparément $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

En 0 :
Quand $x \to 0$ on a $e^{-\sqrt{x}} \to 1$, donc $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$.
On sait que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge.
Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

En $+\infty$:
On fait le changement de variable $u = \sqrt{x}$ dans $\int_1^A \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.
On a $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Donc

$$\int_1^A \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^A e^{-\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}_{= du} = 2 \int_1^{\sqrt{A}} e^{-u} du.$$

et
pour $x = 1$
$u = \sqrt{1} = 1$
pour $x = A$
$u = \sqrt{A}$

Donc
$$\int_1^A \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\Big[-e^{-u}\Big]_1^{\sqrt{A}} = 2(e^{-1} - e^{-\sqrt{A}})$$
puis $\int_1^A \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \to \frac{2}{e}$ quand $A \to \infty$.
Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

$$\sqrt[3]{x^3+1} = \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \sim x \text{ quand}_{x\to+\infty}$$

$$= x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Feuille 5 - Ex.4
Nature de $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}\right) dx$

On pose $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}$. La fonction f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Cherchons un équivalent simple de f en $+\infty$.

On va utiliser le fait que $\frac{1}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$ et le développement limité de $(1+y)^\alpha$ en $y = 0$.

$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ quand $y \to 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= x\left(\left(1+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right) - \left(1+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\right) \\
&= x\left(-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= -\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{x^3} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

...

Feuille 5 - Ex.4

Nature de $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}\right) dx$

rappel Si : $f \underset{x \to \infty}{\sim} g$ et $g > 0$

alors $f(x) > 0$ pour x assez grand :

$h = f - g = o(g)$

Donc $\exists A$ tq

$x \geq A \Rightarrow |h(x)| \leq \frac{1}{2} g(x)$

Alors

$f(x) \geq g(x) - \frac{1}{2} g(x)$

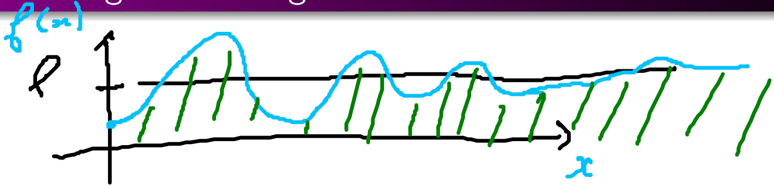
$= \frac{1}{2} g(x) > 0$

Ainsi $f(x) \sim -\frac{1}{2x}$ quand $x \to +\infty$.

On a $-\frac{1}{2x} < 0$ pour $x > 0$.
Donc on a aussi $f(x) < 0$ pour x assez grand.

On sait que $\int_{.}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente.
Donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions négatives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Feuille 5 - Ex.5
Limite et convergence d'intégrale



(1) $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue par morceaux telle que $f(t) \to l$ quand $t \to +\infty$ avec $l > 0$ ou $l = +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

(2) Trouver $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue par morceaux telle que g n'a pas de limite en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.