Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{x-1}{x^2+x+1}$

Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$.
On voit que $P(x) = x^2 + x + 1$ est irréductible car $\Delta = 1^2 - 4 < 0$.
Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et a une primitive sur $\mathbb{R}$.
On met f sous la forme

$$f = a\frac{P'}{P} + \frac{b}{P}$$

où a, b sont des nombres. Alors $\frac{P'}{P}$ est facile à intégrer et $\frac{b}{P}$ est comme l'exercice précédent.

P'

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{P'}{P} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{P}$$

Une primitive de $\frac{P'}{P}$ est $\ln(|P|)$, qui est égal à $\ln(P)$ car $P > 0$.

...

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{x-1}{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned}
\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt &= \int_{\cdot}^{x} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt \\
&= \frac{4}{3}\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{\Big(\underbrace{\tfrac{2}{\sqrt{3}}(t+\tfrac{1}{2})}\Big)^2+1}\,dt
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Donc $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$. Pour $t = x$, on a $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt &= \frac{4}{3}\int_{\cdot}^{\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}du\Big) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan u\Big]_{\cdot}^{\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + C^{te}
\end{aligned}$$

Rappel : $f = \frac{1}{2} \cdot \frac{P'}{P} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{P}$.
Finalement les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}$$

~~rappel~~ Si on avait

$f(x) = \dfrac{x^3+x+2}{x^2+x+1} = \dfrac{Q}{P}$ il faudrait d'abord diviser Q par P

$$x^3+x+2 = (x^2+x+1)(x-1)+x+3$$

$$f(x) = \frac{(x-1)P+(x+3)}{P} = \underbrace{x-1}_{\text{facile à intégrer}} + \underbrace{\frac{x+3}{P}}_{\text{comme cet exercice}}$$

Rappels : changement de variable

$f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Pour s'en souvenir :
on pose $u = \varphi(x)$. Donc $du = \varphi'(x)dx$ (comparer à $\frac{d\varphi}{du} = \varphi'(u)$).
Pour les bornes : quand $x = a$, $u = \varphi(a)$; idem pour b.

En général le facteur $\varphi'(x)$ n'est pas explicitement écrit dans l'intégrande. Si φ' ne s'annule pas, on peut le faire apparaître en écrivant $1 = \frac{1}{\varphi'(x)}\varphi'(x)$.

Règles de Bioche

Il s'agit de changements de variables classiques, proposés par le français Charles Bioche (1859-1949), qui permettent d'intégrer les fractions rationnelles de fonctions trigonométriques $P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)$ en se ramenant à intégrer des fractions rationnelles. Pour nous guider dans le choix du changement de variables, on a les règles suivantes. On regarde le terme intégré $f(x)\,\mathrm{d}x$ dans son ensemble.

- s'il est invariant par $x \mapsto -x$, alors on pose $u = \cos x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $u = \sin x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $u = \tan x$,
- dans tous les cas $u = \tan(x/2)$ est un changement qui marche, mais est très laborieux.

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\frac{1}{1+\sin^2 x}$

Comme $\sin^2 x \geq 0$ le dénominateur ne s'annule pas et
$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
f est une fraction en sin, cos.
On a $f(x+\pi)d(x+\pi) = f(x)dx$, donc les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $u = \tan x$.
On a $du = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1+\tan^2 x)dx$.

$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{1+2\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

...

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\frac{1}{1+\sin^2 x}$

On va faire le changement de variable $u = \tan x$. Attention : la fonction tan n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, seulement sur des intervalles $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$

On se place sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et " " aussi

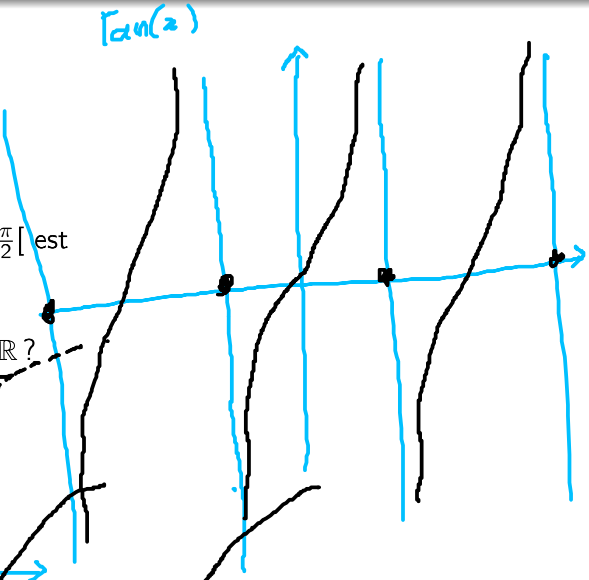
$$
\begin{aligned}
\int_{\cdot}^{x} f(t)dt &= \int_{\cdot}^{x} \left(\frac{1}{1+2\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) dt \\
&= \int_{\cdot}^{\tan(x)} \frac{1}{1+2u^2} du \\
&= \int_{\cdot}^{\sqrt{2}\tan(x)} \frac{1}{1+v^2}\frac{1}{\sqrt{2}} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan v\Big]_{\cdot}^{\sqrt{2}\tan(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C^{te}
\end{aligned}
$$

changement $v = \sqrt{2}\, u$

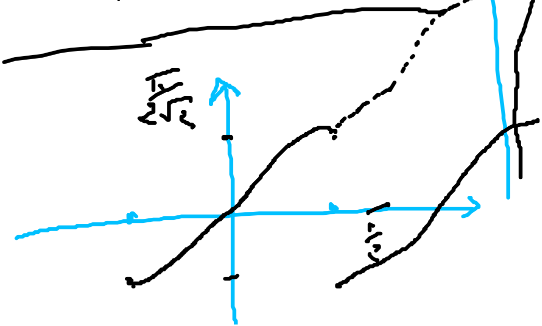
$dv = \sqrt{2}\, du$

Primitive de $\frac{1}{1+\sin^2 x}$

Ainsi une primitive de f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est
$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan(x))$.



Est-ce que la formule marche sur $\mathbb{R}$?



sur $\mathbb{R}$ on a plutôt

$$\int^x f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + C_k$$

où C_k dépend de k tq

$$x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

Feuille 5 - Ex.1

$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

Soit $f(t) = t^2 e^{-t}$

$\int u'v = [u.v] - \int uv'$

primitive de f ?

$$\int_0^x \underbrace{t^2}_{v} \underbrace{e^{-t}}_{u'} dt = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 2t(-e^{-t})dt$$

$u(t) = -e^{-t}$

$$= \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x \underbrace{t}_{v} \underbrace{e^{-t}}_{u'} dt$$

$$= \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x + 2\left(\left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}\,dt\right)$$

$$= \left[-t^2 e^{-t} - 2te^{-t}\right]_0^x + 2\left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= \left[\left(-t^2 - 2t - \cancel{1}\,2\right) e^{-t}\right]_0^x$$

$$= \left(-x^2 - 2x - \cancel{1}\,2\right) e^{-x} - \left(-\cancel{1}\,2 \times 1\right)$$

$$= \cancel{1 - \left(x^2 + 2x + 1\right) e^{-x}}$$

$$= 2 - \left(x^2 + 2x + 2\right) e^{-x}$$

Donc $\int_0^x f(t)\,dt = 2 - P(x)e^{-x}$

où $P(x) = x^2 + 2x + 2$ est un polynôme

On a $P(x)e^{-x} \longrightarrow 0$

quand $x \to +\infty$ par la comparaison polynôme/exponentielle

Donc $\int_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$ quand $x \to +\infty$

Autrement dit $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2$

1) Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$

Le dénominateur s'annule en 0, -1, -2 seulement. Donc $\frac{1}{t(t+1)(t+2)}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$; et elle a une primitive.

On sait qu'on peut écrire

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2}$$

pour avoir a, on multiplie par t :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = a + t\left(\frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2}\right)$$

$t=0$

et on évalue en 0

d'où $$\frac{1}{1\times 2} = a + 0(\dots)$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Pour b on multiplie par $(t+1)$:

$$\frac{1}{t(t+2)} = b + (t+1)\left(\frac{a}{t} + \frac{c}{t+2}\right)$$

on fait $t=-1$ $\quad \dfrac{1}{-1\times 1} = b + 0\times(\cdots)$

$\boxed{b=-1}$

Pour c : $\quad \dfrac{1}{t(t+1)} = c + (t+2)\left(\dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}\right)$

$t=-2$ $\quad \dfrac{1}{-2(-1)} = c$

$\boxed{c=\frac{1}{2}}$ $\quad \dfrac{1}{t(t+1)(t+2)} = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{2(t+2)}$

On a donc

$$\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)(t+2)} = \left[\frac{1}{2}\log|t| - \log|t+1| + \frac{1}{2}\log|t+2|\right]_1^x$$

Feuille 5 - Ex.3

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t}$$

Entre 1 et X $\quad t,\ t+1,\ t+2$ sont ≥ 0

d'où

$$\int_1^X \frac{dt}{t(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\log(x) - \log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x+2) - \left(\frac{1}{2}\times 0 - \log(2) + \frac{1}{2}\log(3)\right)$$

Est-ce que ceci converge quand $X \to +\infty$?

On peut réécrire

$$\frac{1}{2}\log(x) - \log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x+2)$$

$$= \log\left(\underbrace{\frac{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}{x+1}}\right) \to 0$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{1+\frac{1}{x}} \to 1$$