Feuille 4 - Ex.5
Primitive de $(\sin x)^2$.

Une méthode générale qui marche ici : on se sert des formules

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
(\sin x)^2 &= -\frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2x) - 2\right) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

...

Primitive de $(\sin x)^2$.

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{\cdot}^{x} (\sin t)^2 dt &= \int_{\cdot}^{x} \Big(-\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\Big) dt \\
&= \Big[-\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\Big]_{\cdot}^{x} \\
&= -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

Une primitive de $\sin^2 x$ est $-\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x$.

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $(\sin x)^3$.

On utilise encore les formules $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

$$\left(\frac{1}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}$$

$$\begin{aligned}
(\sin x)^3 &= \boxed{\frac{1}{-8i}}(e^{ix} - e^{-ix})^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left((e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

...

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $(\sin x)^3$.

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{\cdot}^{x} (\sin t)^3 dt &= \int_{\cdot}^{x} -\frac{1}{4}\Big(\sin(3t) + 3\sin(t)\Big)\, dt \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos(3t) - 3\cos(t)\right]_{\cdot}^{x} \\
&= \boxed{\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)}
\end{aligned}$$

Règles de Bioche

Il s'agit de changements de variables classiques, proposés par le français Charles Bioche (1859-1949), qui permettent d'intégrer les fractions rationnelles de fonctions trigonométriques $P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)$ en se ramenant à intégrer des fractions rationnelles. Pour nous guider dans le choix du changement de variables, on a les règles suivantes. On regarde le terme intégré $f(x)\,\mathrm{d}x$ dans son ensemble.

- s'il est invariant par $x \mapsto -x$, alors on pose $u = \cos x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $u = \sin x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $u = \tan x$,
- dans tous les cas $u = \tan(x/2)$ est un changement qui marche, mais est très laborieux.

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $(\sin x)^3$.

Refaire $\int_0^x (\sin t)^3 dt$ avec les règles de Bioche.
L'intégrande est $(\sin t)^3 dt$
Le changement $t \mapsto -t$ la transforme en
$(\sin(-t))^3 d(-t) = (-1)^4 (\sin t)^3 dt = (\sin t)^3 dt$
Donc l'intégrande est invariante par $t \mapsto -t$ et les règles de Bioche proposent le changement de variable $u = \cos(t)$.
On a alors $du = -\sin(t)dt$ et, pour $t = 0$, $u = \cos(0) = 1$, pour $t = x$, $u = \cos(x)$.

x

$\sin^3 t \, dt$

0

$$\int_0^x (\sin t)^3 dt = -\int_0^x (\sin t)^2 (-\sin(t) dt)$$
$$= -\int_1^{\cos(x)} (1 - u^2) du$$
$$= [\frac{1}{3}u^3 - u]_1^{\cos(x)}$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + C^{te}$$

$\sin^2 t$
$= 1 - \cos^2 t$
$= 1 - u^2$

primitive calculée avec Bioche

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $(\sin x)^3$.

On avait trouvé par la méthode de linéarisation
$\int_{.}^{x}(\sin t)^3 dt = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x) + C^{te}$.
Est-ce bien la même chose ?

primitive calculée par linéarisation

Linéarisons $\cos^3(x)$:

$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

$$
\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 6\cos(x)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}
$$

Donc $\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) = \frac{1}{12}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(x) - \cos(x)$
$= \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)$.

Feuille 4 - Ex.6

Primitive de $\frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$.

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$
Comme $\cos x \geq -1$ on a $2+\cos x \neq 0$ et f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
Avec la règle de Bioche : $f(-x)d(-x) = \frac{-\sin x}{(2+\cos x)^2}(-dx) = f(x)dx$, donc on peut essayer le changement de variables $u = \cos(t)$, $du = -\sin(t)dt$.
Pour $t = 0$ on a $u = 1$ et pour $t = x$, $u = \cos x$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x -\frac{1}{(2+\cos t)^2}(-\sin t dt) \\
&= \int_1^{\cos x} -\frac{1}{(2+u)^2} du \\
&= \left[\frac{1}{2+u}\right]_1^{\cos x} \\
&= \frac{1}{2+\cos x} + C^{te}
\end{aligned}$$

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$.

Ici on peut aussi voir directement que $f(x) = \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$ est de la forme
$f(x) = g(\cos x) \times (-\sin x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$
où $\varphi(x) = \cos x$ et $g(u) = -\frac{1}{(2+u)^2}$.
Donc on a tout de suite

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x g(\cos t)\cos'(t)dt$$
$$= \int_1^{\cos x} g(u)du$$

et on continue comme ci-dessus.

on peut aussi écrire

$$f(x) = \frac{-h'(x)}{h(x)^2}$$

avec

$$h(x) = 2 + \cos(x)$$

Donc $\int_0^x f(t)dt = \left[\frac{1}{h(t)}\right]_0^x$

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}$.

La fonction $f(x) = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

Pour l'intégrer le mieux est de linéariser.
Si on connaît la formule $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ c'est facile.
Sinon on peut encore utiliser $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$,
$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} &= \frac{1}{2i}(e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}) \cdot \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{3}ix} + e^{-\frac{1}{3}ix}) \\
&= \frac{1}{4i}(e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})ix} - e^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})ix} + e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})ix} - e^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})ix}) \\
&= \frac{1}{4i}(2i\sin(\frac{5}{6}x) + 2i\sin(\frac{1}{6}x)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(\frac{5}{6}x) + \sin(\frac{1}{6}x))
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\cdot}^{x} f(t)dt &= \frac{1}{2}\Big[-\frac{6}{5}\cos(\frac{5}{6}t) - 6\cos(\frac{1}{6}t)\Big]_{\cdot}^{x}\\ &= -\frac{3}{5}\cos(\frac{5}{6}x) - 3\cos(\frac{1}{6}x).\end{aligned}$$

Remarque

parfois il est facile de trouver une primitive

- $$\boxed{f(x) = g'(x) \cdot g(x)^n}$$ $n \in \mathbb{Z}$, $n \in]0, +\infty[$

$$\int^x f = \left[\frac{1}{n+1} g^{n+1}\right]^x$$

- $f(x) = \varphi'(x) \times g(\varphi(x))$

$$\int^x f(t)\,dt = \int^{\varphi(x)} g(u)\,du$$

$u = \varphi(x)$

Exp 6

$$g(x) = 3 + \cos^2(x)$$

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{3+\cos^2(x)}$$

Retour sur Ex.1

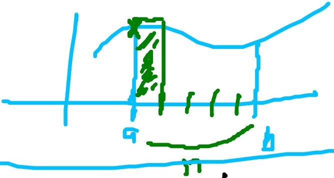
4] Etudier $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ (quand $n \to \infty$)

avec des sommes de Riemann

rappel $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

La somme de Riemann (à l'ordre n) de f sur $[a,b]$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$



Si f est continue, $I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

On veut faire apparaître une fonction de $\frac{k}{n}$ dans la somme $\times \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} n^{\alpha} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$$

$$= n^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$$

$\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} = f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $f(x) = x^{\alpha}$

Est-ce que

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$$

est la somme de Riemann d'une fonction ?

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\underbrace{1}_{b-a}}{n}\left(\underbrace{0}_{a} + \frac{k \times \overbrace{1}^{b-a}}{n}\right)^{\alpha}$$

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Donc : $a = 0$ $b = 1$

$f(x) = x^{\alpha}$

Ainsi I_n est la somme de Riemann de $f(x) = x^{\alpha}$ entre 0 et 1 (à l'ordre n)

Pour $\alpha > 0$, f est définie et continue sur $[0,1]$

Donc $I_n \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$

$$\int_0^1 t^\alpha\,dt = \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(1^{\alpha+1} - 0^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}$$

On a donc écrit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = n^{\alpha+1} I_n$$

et $I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$

Autrement dit

$$\frac{u_n}{\frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$ quand $n \to \infty$

Ex 1 (4)

Etudier $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)$

avec les sommes de Riemann

- $\ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln(k) - \ln(n)$
- $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \cdots$ au lieu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cdots$