Feuille 4 - Ex.3

Primitive de $\frac{x^2}{x^4-1}$.

On va d'abord décomposer $f(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$ en éléments simples.
On a $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.
Comme le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur, on sait qu'on peut écrire

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}}$$

où a, b, c, d sont des nombres.

Pour touver a on multiplie par $(x - 1)$ et on évalue en $x = 1$ (après simplification) :

$$(x - 1)f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)(x^2 + 1)} = a + \left(\frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}\right)(x - 1)$$

Pour $x = 1$ on a $\frac{1}{(1+1)(1+1)} = a + (\cdot) \times 0$. Donc $a = \frac{1}{4}$.

Feuille 4 - Ex.3

Primitive de $\frac{x^2}{x^4-1}$.

Pour touver b on multiplie par $(x+1)$ et on évalue en $x=-1$:

$$(x+1)f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = b + \Big(\frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}\Big)(x+1)$$

Pour $x=-1$ on a $\frac{1}{(-1-1)(1+1)} = b + (\cdot) \times 0$. Donc $b = -\frac{1}{4}$.

Pour le reste on pourrait multiplier par $(x-i)$, $(x+i)$, faire de même et on en déduire $(ci+d)$, $(-ci+d)$ puis trouver c, d.
On peut aussi soustraire ce qu'on a trouvé :

$$\begin{aligned} f(x) - \Big(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}\Big) &= \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} - \frac{(x+1)-(x-1)}{4(x^2-1)} \\ &= \frac{2x^2-(x^2+1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{x^2-1}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$.

La fonction est définie et continue sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Sur ces intervalles une primitive de f est

$$\begin{aligned}
\int_{.}^{x} f(t)dt &= \int_{.}^{x} \left(\frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t^2+1)}\right)dt \\
&= \left[\frac{1}{4}\log(|t-1|) - \frac{1}{4}\log(|t+1|) + \frac{1}{2}\arctan(t)\right]_{.}^{x} \\
&= \frac{1}{4}\log(|x-1|) - \frac{1}{4}\log(|x+1|) + \frac{1}{2}\arctan(x) + C^{te}
\end{aligned}$$

$\int \sqrt{1-t^2}\, dt$

on aimerait que $1-t^2$ soit un carré

. on va utiliser $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$\boxed{1 - \sin^2 u = \cos^2 u}$ on peut essayer $t = \sin(u)$

. Avec sh, ch $\quad ch^2 u - sh^2 u = 1$

$$ch^2 u = 1 + sh^2 u$$

Feuille 4 - Ex.4
Primitive de $\sqrt{1-x^2}$.

La fonction $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ est définie pour $1-x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $|x| \leq 1$. Ainsi f est définie sur $[-1,1]$.
En outre f est continue sur $[-1,1]$ et on peut définir une primitive de f par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

pour $x = g(u)$ on a $dx = g'(u)du$

On va utiliser la formule $1-\sin^2(u)=\cos^2(u)$.

Pour $x \in [-1,1]$ on peut écrire $x=\sin(u)$ pour un unique $u \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Alors $u=\arcsin(x)$.

$t=\sin(u)$ $dt=\cos(u)du$

Faisons le changement de variable $x=\sin(u)$, $dx=\cos(u)du$ dans l'intégrale (on a $u=\arcsin(x)$ et, pour $x=0$, $u=0$)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt \\ &= \int_0^{\arcsin(x)} \sqrt{1-\sin^2(u)}\,\cos(u)du \end{aligned}$$

Primitive de $\sqrt{1-x^2}$.

Comme $\sqrt{-}$ est positif, on a $\sqrt{1-\sin^2(u)} = |\cos(u)|$.
Mais, pour $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(u) \geq 0$, donc
$\sqrt{1-\sin^2(u)} = \cos(u)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\arcsin(x)} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du \\ &= \int_0^{\arcsin(x)} \cos^2(u) du \end{aligned}$$

On linéarise $\cos^2(u)$ (exercice 5) $\cos(u) = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$.
Donc $\cos^2(u) = \frac{1}{4}(e^{2iu} + e^{-2iu} + 2) = \frac{1}{4}(2\cos(2u) + 2)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{2}(\cos(2u) + 1) du \\ &= [\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(2u) + u)]_0^{\arcsin(x)} \\ F(x) &= \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x) \end{aligned}$$

Feuille 4 - Ex.4
Primitive de $\sqrt{1-x^2}$.

On a aussi $\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$.
Donc $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))$.
$\sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (car $\cos(t) > 0$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).
Donc

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$$

Primitive de $(\sin x)^2$.

Une méthode générale qui marche ici : on se sert des formules

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 &= -\frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2\\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2x) - 2\right) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a

$e^{ix}\cdot e^{-ix}$

$= e^{ix-ix}$

$= e^0 = 1$

...

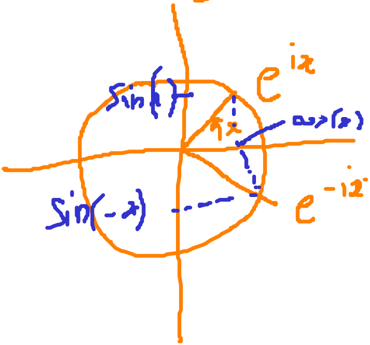
Primitive de $(\sin x)^2$.

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_{.}^{x} (\sin t)^2 dt &= \int_{.}^{x} \left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\right]_{.}^{x} \\ &= -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x \qquad + C^{te}\end{aligned}$$

Une primitive de $\sin^2 x$ est $-\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x$.

Ex 5 Primitive de $\cos^4 x$



pour $z \in \mathbb{C}$

si $|z| = 1$

$$z^{-1} = \overline{z}$$

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $(\sin x)^3$.

On utilise encore les formules $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$,
$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin(x) = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^3 &= \frac{-1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{-1}{8i}\left((e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right) \\
&= \frac{-1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right)
\end{aligned}
$$

. . .

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{.}^{x} (\sin t)^3 dt &= \int_{.}^{x} \frac{1}{4}\Big(\sin(3t) - 3\sin(t)\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\Big[-\frac{1}{3}\cos(3t) + 3\cos(t)\Big]_{.}^{x} \\
&= -\frac{1}{12}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

Règles de Bioche

Il s'agit de changements de variables classiques, proposés par le français Charles Bioche (1859-1949), qui permettent d'intégrer les fractions rationnelles de fonctions trigonométriques $P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)$ en se ramenant à intégrer des fractions rationnelles. Pour nous guider dans le choix du changement de variables, on a les règles suivantes. On regarde le terme intégré $f(x)\,\mathrm{d}x$ dans son ensemble.

- s'il est invariant par $x \mapsto -x$, alors on pose $u = \cos x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $u = \sin x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $u = \tan x$,
- dans tous les cas $u = \tan(x/2)$ est un changement qui marche, mais est très laborieux.

Feuille 4 - Ex.6

Primitive de $(\sin x)^3$.

On regarde $(\sin t)^3 dt$

on change t en $-t$

$$\sin(-t)^3 d(-t) = -(\sin t)^3(-dt)$$
$$= (\sin t)^3 dt$$

Refaire $\int_{\cdot}^{x} (\sin t)^3 dt$ avec les règles de Bioche.

Ici l'intégrand $(\sin t)^3 dt$ est invariant

par $t \longmapsto -t$

Donc on essaye le changement

de variable $u = \cos t$

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4\underbrace{e^{3ix}e^{-ix}}_{e^{2ix}} + 6\times 1 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix} + 4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right)$$

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}}$$

On obtient

$$\int_0^x \cos^4(t)\,dt = \left[\frac{1}{8}\times\frac{\sin(4t)}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{3}{8}t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + C^{te}$$

Calcul de $\int_0^x \sin^3(t)\,dt$

on pose $u = \cos(t)$

on a alors $t = \arccos(u) \in [0, \pi]$

Ce changement de variable est valable sur $[0, \pi]$

on a $\boxed{du = -\sin(t)\,dt}$

on a aussi $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - u^2$

$$\int_0^x \sin(t)^3\,dt = \int_0^x (\sin(t))^2 \sin(t)\,dt$$

$$= \int_{\cancel{\arccos 0}\ \cos(0)}^{\cancel{\arccos(x)}\ \cos(x)} (1-u^2)(-du)$$

$$= \int_{\cancel{\arccos(0)}\ \cos(0)}^{\cancel{\arccos(x)}\ \cos(x)} (u^2-1)\,du$$

$$= \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_{\cancel{\frac{\pi}{2}}\ 1}^{\cancel{\arccos(x)}\ \cos(x)}$$

$$= \frac{\cancel{\arccos}(x)^3}{3} - \cancel{\arccos}(x) + C^{te}$$

$$= \frac{\cos^3(x)}{3} - \cos(x)$$

Pour la prochaine fois, trouver l'erreur et <u>comparer au</u> <u>premier calcul</u>

(linéariser $\cos^3$)