Somme de Riemann $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$$

$$\left(= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) \right)$$

Feuille 4 - Ex.1
Etudier $\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k$.

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k$. On fait un changement d'indice pour que le nouvel indice aille de 1 à $n+1$. On pose $k' = k - n$ (donc $k = k' + n$) et on a

$$u_n = \sum_{k'=1}^{n} \ln(n + k').$$

(Une fois que le changement d'indice est fait on peut encore appeler k le nouvel indice.)
On essaye d'écrire u_n avec des $\frac{k}{n}$ et "sans k tout seul"

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln(n + k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(n\,(1 + \frac{k}{n})) \end{aligned}$$

...

Feuille 4 - Ex.1

Etudier $\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k$.

...

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(n\,(1+\frac{k}{n}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln n + \ln(1+\frac{k}{n})\right)$$

$$= n\ln n + \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$$

il faut montrer $v_n = o(n\ln(n))$

Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$.

On a $u_n = n\ln n + v_n$ et v_n peut se comparer à une somme de Riemann.

$b-a$

En fait $v_n = nS_n$

où $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a+(b-a)\frac{k}{n})$.

avec $a=1$, $b-a=1$.

a

Donc $a=1$, $b=2$. ...

Feuille 4 - Ex.1
Etudier $\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k$.

Ainsi S_n est la n^{ieme} somme de Riemann de $f(x) = \ln(x)$ entre 1 et 2.
Puisque f est continue sur $[1, 2]$ on a $S_n \to I := \int_1^2 \ln(x)dx$ quand $n \to \infty$.
Finalement $u_n = \underline{n \ln n} + \underbrace{nS_n}_{o(n \ln(n))}$ avec $S_n \to I$.

on pourrait calculer I

$\left(\int^x \ln(t)dt = x\ln(x) - x \right)$

mais on n'a pas besoin

Comme S_n tend vers une limite finie et $\ln n$ tend vers ∞, on a $S_n = o(\ln n)$, puis $nS_n = o(n \ln n)$.
Donc, par définition de $\sim$, on a $u_n \sim n \ln n$.

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{1}{4x^2-3x+2}$

Soit $f(x) = \frac{1}{4x^2-3x+2}$ et $P(x) = 4x^2 - 3x + 2$. $= (2x - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + 2$
Voyons d'abord si P a des racines :
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 2 = -23 < 0$ donc P est irréductible.
Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que $\boxed{\arctan'(t) = \frac{1}{t^2+1}}$ et on va faire un changement de variable pour s'y ramener. (On va mettre P sous la forme $(ax+b)^2 + C$) $= (y^2+1)C$ $\quad y = ax + b$

$$\int^x f(t)dt = \int^x \frac{1}{(2t-\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + 2}dt$$
$$= \int^x \frac{1}{(2t-\frac{3}{4})^2 + \frac{23}{16}}dt$$
$$= \frac{16}{23}\int^x \frac{1}{\underbrace{\frac{16}{23}(2t-\frac{3}{4})^2}_{u^2} + 1}dt$$

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{1}{4x^2-3x+2}$

$u = \varphi(t)$

$du = \varphi'(t)dt$

On fait le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{23}}(2t - \frac{3}{4}) = \frac{8}{\sqrt{23}}t - \frac{3}{\sqrt{23}}$.

On a $\boxed{du = \frac{8}{\sqrt{23}}dt}$ et, pour $t = x$, $u = \frac{8}{\sqrt{23}}x - \frac{3}{\sqrt{23}}$.

$$\int_{.}^{x} f(t)dt = \frac{16}{23}\int_{.}^{\frac{8}{\sqrt{23}}x-\frac{3}{\sqrt{23}}} \frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt{23}}{8}du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}}\Big[\arctan u\Big]_{.}^{\frac{8}{\sqrt{23}}x-\frac{3}{\sqrt{23}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{8}{\sqrt{23}}x - \frac{3}{\sqrt{23}}\right) + C^{te}$$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{8}{\sqrt{23}}x - \frac{3}{\sqrt{23}}\right) + C$ où C est une constante.

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{x-1}{x^2+x+1}$

Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$.
On voit que $P(x) = x^2 + x + 1$ est irréductible car $\Delta = 1^2 - 4 < 0$.
Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et a une primitive sur $\mathbb{R}$.
On met f sous la forme

$$f = a\frac{P'}{P} + \frac{b}{P}$$

où a, b sont des nombres. Alors $\frac{P'}{P}$ est facile à intégrer et $\frac{b}{P}$ est comme l'exercice précédent.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1} &= \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P'}{P} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{P} \end{aligned}$$

Une primitive de $\frac{P'}{P}$ est $\ln(|P|)$, qui est égal à $\ln(P)$ car $P > 0$.

...

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{x-1}{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned}\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}dt &= \int_{\cdot}^{x} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt \\ &= \frac{4}{3}\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)^2+1}dt\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Donc $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$. Pour $t = x$, on a $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}dt &= \frac{4}{3}\int_{\cdot}^{\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}du\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan u\Big]_{\cdot}^{\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C^{te}\end{aligned}$$

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{x-1}{x^2+x+1}$

Rappel : $f = \frac{1}{2} \cdot \frac{P'}{P} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{P}$.
Finalement les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te} \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te} \end{aligned}$$

Rappels : changement de variable

$f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Pour s'en souvenir :
on pose $u = \varphi(x)$. Donc $du = \varphi'(x)dx$ (comparer à $\frac{d\varphi}{du} = \varphi'(u)$).
Pour les bornes : quand $x = a$, $u = \varphi(a)$; idem pour b.

En général le facteur $\varphi'(x)$ n'est pas explicitement écrit dans l'intégrande. Si φ' ne s'annule pas, on peut le faire apparaître en écrivant $1 = \frac{1}{\varphi'(x)}\varphi'(x)$.

Règles de Bioche

Il s'agit de changements de variables classiques, proposés par le français Charles Bioche (1859-1949), qui permettent d'intégrer les fractions rationnelles de fonctions trigonométriques $P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)$ en se ramenant à intégrer des fractions rationnelles. Pour nous guider dans le choix du changement de variables, on a les règles suivantes. On regarde le terme intégré $f(x)\,\mathrm{d}x$ dans son ensemble.

- s'il est invariant par $x \mapsto -x$, alors on pose $u = \cos x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $u = \sin x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $u = \tan x$,
- dans tous les cas $u = \tan(x/2)$ est un changement qui marche, mais est très laborieux.

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\frac{1}{1+\sin^2 x}$

Comme $\sin^2 x \geq 0$ le dénominateur ne s'annule pas et
$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
f est une fraction en sin, cos.
On a $f(x+\pi)d(x+\pi) = f(x)dx$, donc les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $u = \tan x$.
On a $du = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1+\tan^2 x)dx$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{1+2\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

...

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\frac{1}{1+\sin^2 x}$

On va faire le changement de variable $u = \tan x$. Attention : la fonction tan n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, seulement sur des intervalles $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.
On se place sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned}
\int_{.}^{x} f(t)dt &= \int_{.}^{x} \left(\frac{1}{1+2\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) dt \\
&= \int_{.}^{\tan(x)} \frac{1}{1+2u^2} du \\
&= \int_{.}^{\sqrt{2}\tan(x)} \frac{1}{1+v^2} \frac{1}{\sqrt{2}} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\arctan v\Big]_{.}^{\sqrt{2}\tan(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C^{te}
\end{aligned}$$

Feuille 4 - Ex.6
Primitive de $\frac{1}{1+\sin^2 x}$

Ainsi une primitive de f sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est
$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x))$.

Est-ce que la formule marche sur $\mathbb{R}$?

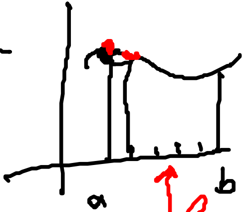
Ex 1 (3)

$$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

. Trouver une valeur de α tq v_n est une somme de Riemann.

. donner alors $\lim v_n$

$$v_n = \frac{\underset{b-a}{\cdot}}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\underset{a}{\cdot} + \underset{b-a}{\cdot}\,\frac{k}{n}\right)$$



longueur des petits intervalles

$$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} n^\alpha \underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \sin\left(\frac{k}{n}\right)}_{f\left(0+1\cdot\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{n^\alpha}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{n^{2-\alpha}}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+1\cdot\frac{k}{n}\right)}$$

$b-a$; a ; $b-a$

où $f(x) = x^\alpha \sin(x)$

Pour que cette écriture ressemble à une somme de Riemann, il faut $2-\alpha = 1$

Donc $\boxed{\alpha = 1}$

Alors v_n est la somme de Riemann

de $f(x) = x \sin(x)$

entre a et b avec $\begin{cases} a = 0 \\ b - a = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc, comme f est continue sur $[0, 1]$,

d'après le théorème sur les sommes

de Riemann $v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 x \sin(x)\, dx$

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin(x)}_{u'} dx = \left[-x\cos(x)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-\cos x) dx$$

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

$u = -\cos(x)$

$$= -\cos(1) + \int_0^1 \cos(x) dx$$

$$= -\cos(1) + \left[\sin(x)\right]_0^1$$

$$= \sin(1) - \cos(1)$$

Comment se comporte v_n pour $\alpha \neq 1$?

$\alpha > -1$

on a vu

$$v_n = \frac{1}{n^{2-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + 1 \cdot \frac{k}{n}\right)$$

avec $f(x) = x^\alpha \sin(x)$

on a $v_n = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\underset{a}{0} + \underset{b-a}{1} \cdot \frac{k}{n}\right)$

$a=0 \quad b=1$

$= \frac{1}{n^{1-\alpha}} S_n$

où S_n est la $n^{\text{ième}}$ somme de Riemann de $x^\alpha \sin(x)$ entre 0 et 1

- Comme $\alpha > -1$ on a

$f(x) \sim x^\alpha \cdot x$ quand $x \to 0$

$= x^{1+\alpha}$

avec $1+\alpha > 0$. donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

- Sur $]0,1]$ f est continue

. Donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 0$

. Ainsi f est continue sur $[0,1]$

et on a $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$

<u>Remarque</u> $I = \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$

$f(x) = x^{-\alpha} \sin(x)$

Comme f est continue sur $]0,1[$ et $f > 0$ sur $]0,1[$, alors $I = \int_0^1 f(x)\,dx > 0$

En particulier $I \neq 0$

On a donc

$$\frac{v_n}{\frac{I}{n^{1-\alpha}}} = \frac{\frac{S_n}{n^{1-\alpha}}}{\frac{I}{n^{1-\alpha}}} = \frac{S_n}{I} \longrightarrow \frac{I}{I} = 1$$

cf $\tilde{v}_n \sim \frac{\tilde{I}}{n^{1-\alpha}}$