Ex 7

$$\int^{x} e^{-t}\cos(t)\,dt = ?$$

on peut essayer une intégration par parties

$$\boxed{\int u'v = [uv] - \int uv'}$$

$(uv)' = u'v + uv'$

on choisit $u' = e^{-t}$ $u = -e^{-t}$

$v = \cos(t)$

- une primitive est définie modulo le choix d'une constante
- la constante dépend du choix de la bonne la première

Calcul de primitive : $x \mapsto e^{-x}\cos(x)$.

on peut remplacer 0 par autre chose (le résultat diffère d'une constante)

Posons $f(x) = \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt$. On fait des intégrations par parties :

u' v

on refait une intégration par partie

u v u v'

$$f(x) = [-e^{-t}\cos(t)]_0^x - \int_0^x -e^{-t}(-\sin(t))dt$$

$$= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x - \int_0^x e^{-t}\sin(t)dt$$

$[f]_a^b = f(b) - f(a)$

$$= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x - \left([-e^{-t}\sin(t)]_0^x - \int_0^x -e^{-t}\cos(t)dt\right)$$

$$= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x + [e^{-t}\sin(t)]_0^x - \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt$$

D'où $f(x) = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + 1 - f(x)$.

le $\frac{1}{2}$ vient du choix de 0 comme première borne

Puis $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}$.

$(-e^{-x}\cos(x)) - (-e^{0}\cos(0)) = 1 - e^{-x}\cos(x)$

Donc une primitive de $e^{-x}\cos(x)$

est $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + \frac{1}{2}$

Pour n'importe quel nombre $c \in \mathbb{R}$

$f(x) + c$ est une autre primitive

Donc $\boxed{\frac{1}{2} e^{-x}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)}$

est aussi une primitive de $e^{-x}\cos(x)$

Pour les intégrales suivantes, décrire les intervalles $[a, b]$ où la fonction est Riemann intégrable et calculer l'intégrale.
1. $\int_a^b t^n dt$, 2. $\int_a^b e^{\alpha t} dt$, 3. $\int_a^b \sqrt{t} dt$, 4. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ 5. $\int_a^b t^{\frac{1}{3}} dt$,
6. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt$.

1.) La fonction $t \mapsto t^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc Riemann intégrable sur tout intervalle $[a,b]$ $a \leq b$

On a $$\int_a^b t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

---

2) $t \mapsto e^{\alpha t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc ... (comme ci-dessus)

On a $$\int_a^b e^{\alpha t} dt = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right]_a^b \text{ si } \alpha \neq 0$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)$$

Si $\alpha = 0$, on a $e^{\alpha t} = e^0 = 1$

et on a $\int_a^b 1\,dt = [t]_a^b = b-a$

3) $\int_a^b \sqrt{t}\,dt$

$t \mapsto \sqrt{t}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$

donc Riemann intégrable sur $[a,b]$

avec $0 \leqslant a \leqslant b$

Alors $\int_a^b \sqrt{t}\,dt = \int_a^b t^{1/2}\,dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_a^b$

$= \frac{2}{3}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)$

4) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ $\quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est dif. et cont.

sur $]0, +\infty[$, donc Riemann integ.

sur $[a,b]$ avec $0 < a \leq b$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_a^b t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \left[2\, t^{\frac{1}{2}}\right]_a^b$$

$$= 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$$

5) $\displaystyle\int_a^b t^{1/3}\,dt$ (presque comme le 4)

6) A connaître $(\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2}$

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{x^3}{x^2+1}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
On décompose la fraction en éléments simples. Ici le dénominateur est irréductible (x^2+1 n'a pas de racine).
Donc cela revient à faire la division de x^3 par x^2+1.

Q R

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

La fraction $\frac{x}{x^2+1}$ est du type $\frac{f'}{f}$ (à multiple près).

$f(x) = x^2+1$

$f'(x) = 2x$

D'où

$$\int_0^x \frac{t^3}{t^2+1}dt = \int_0^x (t - \frac{t}{t^2+1})dt$$

$$= [\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\log(t^2+1)]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

$\frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) \quad \frac{f'}{f}$

rapide

$(\log|f|)' = \frac{f'}{f}$

Le choix de la borne 0 dans $\int_0^{x} \cdots$ n'est pas important (ça change la primitive par une constante)

Feuille 4 - Ex.3

Primitive de $\frac{1}{x(1+x)^2}$.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$ est définie et continue sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

D'après le cours on sait que f se décompose comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2},$$

ici on ne peut pas évaluer en 0

pour certains nombres a, b, c.

Pour trouver a (ou c), on utilise

$$xf(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = a + \frac{bx}{1+x} + \frac{cx}{(1+x)^2}$$

ici on peut trouver c

et on évalue en 0.

D'où $1 = a + 0 + 0$. Donc $a = 1$.

Primitive de $\frac{1}{x(1+x)^2}$.

Pour trouver c, on utilise

$$(1+x)^2 f(x) = \frac{1}{x} = \frac{a(1+x)^2}{x} + b(1+x) + c$$

et on évalue en $x = -1$.

D'où $-1 = 0 + 0 + c$. Donc $c = -1$.

$f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$

On peut déduire b en faisant la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) &= \frac{1-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{-x-x^2}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{-1}{1+x}. \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Maintenant on trouve une primitive (sur les intervalles où f est définie) :

$$\begin{aligned}\int_{\cdot}^{x} f(t)dt &= \int_{\cdot}^{x}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt \\ &= \left[\log(|t|)-\log(|1+t|)+\frac{1}{1+t}\right]_{\cdot}^{x} \\ &= \log(|x|)-\log(|1+x|)+\frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

+ constante

la borne n'a pas d'importance mais elle doit être dans l'intervalle où on calcule

Ex 3 Décomposer $\dfrac{x^2}{x^4-1}$ en éléments simples

On a $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1)$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Comme $d°(x^2) = 2 \leq d°(x^4-1) = 4$,

on sait qu'on peut écrire

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Trouver a, b, c, d

Pour a on multiplie tout par $(x-1)$ et on évalue en $x=1$

$$\underbrace{(x-1) \times \frac{x^2}{x^4-1}}_{= \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}} = a + \left(\frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}\right)(x-1)$$

$\underline{x = -1}$ $\frac{1}{4} = a + (\ldots) \times 0 = a$

$$\boxed{a = \frac{1}{4}}$$

<u>Remarque</u> pour un terme au carré $\frac{\ldots}{(x+1)^2}$ on peut simplifier le cas d'un numérateur de d° 1

$$\frac{cx+d}{(x+1)^2} = \frac{c(x+1)+d-c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{c}{x+1} + \frac{d-c}{(x+1)^2}$$

Pour la prochaine fois

terminer ce calcul

puis calculer l'intégrale.