Feuille 4 - Ex.7

Calcul de primitive : $x \mapsto e^{-x}\cos(x)$.

Posons $f(x) = \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt$. On fait des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
f(x) &= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x - \int_0^x -e^{-t}(-\sin(t))dt \\
&= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x - \int_0^x e^{-t}\sin(t)dt \\
&= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x - \left([-e^{-t}\sin(t)]_0^x - \int_0^x -e^{-t}\cos(t)dt\right) \\
&= [-e^{-t}\cos(t)]_0^x + [e^{-t}\sin(t)]_0^x - \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt
\end{aligned}$$

D'où $f(x) = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + 1 - f(x)$.

Puis $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}$.

Feuille 4 - Ex.2
Rappel de primitives

Pour les intégrales suivantes, décrire les intervalles $[a, b]$ où la fonction est Riemann intégrable et calculer l'intégrale.
1. $\int_a^b t^n dt$, 2. $\int_a^b e^{\alpha t} dt$, 3. $\int_a^b \sqrt{t} dt$, 4. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ 5. $\int_a^b t^{\frac{1}{3}} dt$,
6. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt$.

Feuille 4 - Ex.3

Primitive de $\frac{x^3}{x^2+1}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
On décompose la fraction en éléments simples. Ici le dénominateur est irréductible (x^2+1 n'a pas de racine).
Donc cela revient à faire la division de x^3 par x^2+1.

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

La fraction $\frac{x}{x^2+1}$ est du type $\frac{f'}{f}$ (à multiple près).

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^3}{t^2+1}dt &= \int_0^x (t - \frac{t}{t^2+1})dt \\ &= [\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\log(t^2+1)]_0^x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(x^2+1).\end{aligned}$$

Feuille 4 - Ex.3
Primitive de $\frac{1}{x(1+x)^2}$.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$ est définie et continue sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

D'après le cours on sait que f se décompose comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2},$$

pour certains nombres a, b, c.

Pour trouver a (ou c), on utilise

$$xf(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = a + \frac{bx}{1+x} + \frac{cx}{(1+x)^2}$$

et on évalue en 0.
D'où $1 = a + 0 + 0$. Donc $a = 1$.

Primitive de $\frac{1}{x(1+x)^2}$.

Pour trouver c, on utilise

$$(1+x)^2 f(x) = \frac{1}{x} = \frac{a(1+x)^2}{x} + b(1+x) + c$$

et on évalue en $x = -1$.
D'où $-1 = 0 + 0 + c$. Donc $c = -1$.

On peut déduire b en faisant la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) &= \frac{1 - (1+x)^2 + x}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{-x - x^2}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{-1}{1+x}. \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Primitive de $\frac{1}{x(1+x)^2}$.

Maintenant on trouve une primitive (sur les intervalles où f est définie) :

$$\begin{aligned}
\int_{\cdot}^{x} f(t)dt &= \int_{\cdot}^{x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt \\
&= \left[\log(|t|) - \log(|1+t|) + \frac{1}{1+t}\right]_{\cdot}^{x} \\
&= \log(|x|) - \log(|1+x|) + \frac{1}{1+x}
\end{aligned}$$