Feuille 3 - Ex.10
Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Critère d'Abel : un analogue de l'intégration par parties.

Pour une série $\left(\sum_n a_n b_n\right)$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $S_{-1} = 0$. On a alors $a_n = S_n - S_{n-1}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) b_n &= \sum_{n=0}^{N} S_n b_n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n b_n - \sum_{m=-1}^{N-1} S_m b_{m+1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S_n (b_n - b_{n+1})\right) + S_N b_N - 0
\end{aligned}$$

Si la suite (S_n) est bornée et que $\left(\sum (b_n - b_{n+1})\right)$ est absolument convergente et que $b_n \to 0$, alors $\left(\sum_n a_n b_n\right)$ converge.

Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Dans notre cas on peut choisir $a_n = \cos(2n)$ et $b_n = \frac{1}{2n}$.
Est-ce que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2k)$ est bornée ?

En fait c'est presque une série géométrique :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{i2k}) \\ &= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} e^{i2k}) \qquad \text{raison } r = e^{2i} \\ &= \mathrm{Re}(\frac{1 - e^{i2(n+1)}}{1 - e^{i2}}) \end{aligned}$$

Donc $|S_n| \leq \left|\frac{1-e^{i2(n+1)}}{1-e^{i2}}\right| \leq \frac{1+|e^{i2(n+1)}|}{|1-e^{i2}|} = \frac{2}{|1-e^{i2}|}$.
On pose $M = \frac{2}{|1-e^{i2}|}$. Donc S_n est borné par M (indépendant de n).

Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

On a $b_n = \frac{1}{2n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Enfin $|b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2}{4n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$.
Donc $|b_n - b_{n+1}|$ est bornée par un multiple du terme général d'une série de Riemann convergente.
Donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum(b_n - b_{n+1}))$ est absolument convergente.

Par le critère d'Abel on en déduit que la série $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$ est convergente.

Feuille 4 - Ex.1 (1)
Sommes de Riemann. Etudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

Rappel : somme de Riemann de f sur $[a, b]$:
$\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ (ou encore $\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + (b-a)\frac{k}{n})$).

Remarque : une telle somme est du type $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{n} f(\beta + \gamma\frac{k}{n})$.
Inversement, pour une somme de ce type, on prend $a = \beta$, $b - a = \gamma$, et on remplace f par un certain multiple pour avoir vraiment une somme de Riemann.

On cherche donc à mettre u_n sous cette forme.
On fait apparaître des $\frac{k}{n}$:

$$\begin{aligned} \frac{n+k}{n^2+k^2} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} \\ &= \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}), \qquad \text{où } f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Avec $a = 0$, $b = 1$, c'est bien la somme de Riemann (d'ordre n) de f sur $[0, 1]$.

...

Etudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème sur les sommes de Riemann, on a donc $u_n \to \int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

On calcule

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \arctan(1) + \frac{\log(2)}{2}$$

Donc $u_n \to \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}$ quand $n \to \infty$.

Feuille 4 - Ex.1 (2)
Sommes de Riemann. Etudier $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Notons que l'indice va de $n+1$ à $2n$ au lieu de 1 à n comme dans une somme de Riemann (ici, l'indice de sommation est k ; n est "fixé".)

On fait d'abord un changement d'indice $k' = k - n$ (donc $k = k' + n$). On trouve

$$u_n = \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{n+k'}.$$

On fait apparaître des $\frac{k'}{n}$:

$$u_n = \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k'}{n}} = \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{n} f(1 + 1 \cdot \frac{k'}{n}),$$

si on pose $f(x) = \frac{1}{x}$.
On a une expression comme somme de Riemann avec $a = 1$ et $b - a = 1$. Donc $a = 1$, $b = 2$.

...

Etudier $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

...
La fonction f est définie et continue sur $[1, 2]$.
Par le théorème sur les sommes de Riemann, on a donc
$u_n \to \int_1^2 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

On a $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [log(x)]_1^2 = \log(2)$.
Donc $u_n \to \log(2)$ quand $n \to \infty$.

Feuille 4 - Ex.8
Intégration et dérivation

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que g, $x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ est dérivable. Calculer g'.

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que f a une primitive définie sur $\mathbb{R}$, disons F, et que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a
$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Ainsi $g(x) = F(x^2) - F(2x)$.

F est dérivable (avec $F' = f$). Donc g est somme de deux fonctions qui sont composées de fonctions dérivables. Donc g est dérivable.
On trouve $g'(x) = F'(x^2) \times (2x) - F'(2x) \times 2 = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.

Feuille 4 - Ex.7
Calcul de primitive : $x \mapsto x^3 \log(x)$.

Ici on a un produit de deux fonctions, dont une qu'on sait intégrer facilement. On essaye une intégration par parties.
On utilise la notation $\int^x f(t)dt$ (une primitive est définie par $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, où a est un nombre dans le domaine de définition ; changer a revient à changer la primitive par une constante et on peut donc "oublier" a).

$$\begin{aligned}
\int^x t^3 \log(t)dt &= [\frac{1}{4}t^4 \log(t)]^x - \int^x \frac{1}{4}t^4 \cdot \frac{1}{t}dt \\
&= [\frac{1}{4}t^4 \log(t)]^x - \int^x \frac{1}{4}t^3 dt \\
&= [\frac{1}{4}t^4 \log(t)]^x - [\frac{1}{16}t^4]^x \\
&= \frac{1}{4}x^4 \log(x) - \frac{1}{16}x^4.
\end{aligned}$$