(1) Convergence.
Soit $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$. La fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc f est intégrable sur tout intervalle compact de $]0, +\infty[$. Il faut étudier la convergence en 0 et $+\infty$.

Convergence en 0 :
quand $x \to 0$ on a $1 + x^2 \to 1$ et $1 + x^\lambda$ tend vers 1, 2 ou $+\infty$ selon que $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$.
Donc $f(x)$ tend vers 1, $\frac{1}{2}$ ou 0 selon que $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$.

Dans tous les cas $f(x)$ tend vers une limite finie quand $x \to 0$ et $\int_0^1 f(x)dx$ converge.
Ou plus simple : pour $x > 0$ on a $1 + x^2 > 1$ et $1 + x^\lambda > \cancel{0}\,1$; donc $f(x) < 1$. On a aussi $f(x) > 0$. Ainsi f est continue et bornée sur $]0, 1]$, donc $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Feuille 5 - Ex.13

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$

Convergence en $+\infty$:
On a $1+x^2 > x^2 > 0$ donc $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
et $1+x^\lambda \geq 1$, donc $\frac{1}{1+x^\lambda} \leq 1$.
Donc $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$.

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.
Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi.

Finalement $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2)} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(1+t^2)}\,dt$$

$$= \int \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)(1+t^2)}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2)} \right) dt$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} - I$$

Feuille 5 - Ex.13

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$

rappel (feuille 4 Ex7)

$I = \int_a^b \sin t \cdot e^t \, dt$

$= \dots$

$= * - I$

donc

$I = \frac{1}{2} *$

Changement de variable $t = \frac{1}{x}$ dans $\int_\varepsilon^A \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} dx$.

On peut écrire $x = \frac{1}{t}$, donc $dx = -\frac{1}{t^2} dt$.
Quand $x = \varepsilon$ on a $t = \frac{1}{\varepsilon}$, quand $x = A$ on a $t = \frac{1}{A}$.
Donc

$$I = \int_\varepsilon^A \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} dx = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{A}} \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\lambda})} \left(-\frac{1}{t^2} dt\right)$$

$$= \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{(t^2+1)(1+\frac{1}{t^\lambda})} dt$$

$$= \boxed{\int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^\lambda}{(t^2+1)(t^\lambda+1)} dt}$$

$t^\lambda = t^\lambda + 1 - 1$

c'est presque I

$? = * + * I$

...

Feuille 5 - Ex.13

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$

posons $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx = \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^\lambda + 1 - 1}{(t^2+1)(t^\lambda+1)}dt$$

= intégrale de h entre ε et A

$$= \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{t^2+1} - \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)}$$

intégrale de h entre $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{\varepsilon}$

Toutes ces intégrales convergent et on peut faire tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$.

Alors $\frac{1}{A} \longrightarrow 0$ et $\frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow +\infty$

Posons $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx$.

On a alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} - I$$

puis

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

on peut écrire $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{B\to\infty} \int_0^B \frac{dt}{1+t^2}$

$= \lim_{B\to\infty} [\arctan]_0^B$

$= \lim_{B\to\infty} (\arctan B - 0)$

$= \frac{\pi}{2}$

<u>Remarque</u> quand on écrit

$\int_a^b f(t)\,dt$ t est une variable "muette"

$= \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(y)\,dy$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

on a défini "l'intégrale de f sur $[a,b]$" $\to$ c'est un nombre

Le nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

ou aussi bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ ----

$x, t, u\dots$ sont des variables "muettes".

Avec les séries

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{(\ell+1)^2}$$

$\boxed{\ell = k-1}$

$\ell = k-1$ donc $k = \ell+1$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2}$$

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Convergence de I_n.

- Posons $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (car $1+x^2 \geq 1$ ne s'annule pas) et continue. Donc $\int_0^1 f(x)dx$ est définie et il faut étudier la convergence en $+\infty$.
- $1+x^2 \geq x^2 \geq 0$ donc $(1+x^2)^{n+1} \geq (x^2)^{n+1} \geq 0$ puis $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{2n+2}}$

. On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n+2}}$ converge

car $2n+2 > 1$

. Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on déduit que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

On a aussi $\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{n+1}}$ $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Donc $f(x) \sim \frac{1}{x^{2n+2}}$ quand $x \to \infty$ ... puis théorème de comparaison

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$

Montrer $I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x \frac{x}{(1+x^2)^{n+2}} dx$ puis $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n$ (ipp).

On sait que la somme de deux intégrales convergente est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+2}} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+2}} \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2 - 1}{(1+x^2)^{n+2}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n+2}}\, dx$$

intégration par parties

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln(|f|) \quad , \quad \int 2ff' = f^2$$

$$\int f^n \cdot f' = \frac{1}{n+1} f^{n+1} \quad \left(\begin{array}{l} n \neq -1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

On voit que $\frac{2x}{(1+x^2)^{n+2}}$ est du type $\frac{f'}{f^{n+2}}$ qui s'intègre en $\frac{-1}{(n+1)f^{n+1}}$.

$\left(\frac{1}{f^{n+1}}\right)' = \left(f^{-n-1}\right)' = (-n-1)f^{-n-2} \cdot f' = -\frac{(n+1)f'}{f^{n+2}}$

$f(x) = 1+x^2 \quad f'(x) = 2x$

$$\int_0^A \overset{v'}{x} \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^{n+2}}}_{u'} dx$$

$$= \left[x \cdot \frac{-1}{2(n+1)(1+x^2)^{n+1}}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{2(n+1)(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{-A}{2(n+1)(1+A^2)^{n+1}} + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Quand $A \to +\infty$, le premier terme tend vers 0 et on obtient $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} I_n$.

D'où $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{2(n+1)}) I_n = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n$.

rappel

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$

$\ln(a^\lambda) = \lambda \ln(a)$

On pose $u_n = \sqrt{n} I_n$.

Montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(1 + \frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{n})$.

$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

$= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}\; I_{n+1}}{\sqrt{n}\; I_n}\right)$

$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}\right)$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right) = \ldots$$

Dans l'autre sens

$$\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right)$$

c'est bien $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

Feuille 5 - Ex.15

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$

$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(1 + \frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{n})$.

Montrer que $\left(\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))\right)$ converge.
Rappel : quand $x \to 0$, on a $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Soit $v_n = \ln(1 + \frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned} v_n &= (\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Donc $v_n \sim \frac{1}{8n^2}$.
On sait que $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ converge car c'est une somme de Riemann avec exposant $\alpha = 2 > 1$.
Comme $\frac{1}{n^2} > 0$ on a aussi $v_n > 0$ pour n assez grand.
Par le théorème de comparaison de séries à termes positifs on obtient que $\left(\sum v_n\right)$ converge.

On a $u_n = \sqrt{n} I_n$ et $\left(\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))\right)$ converge.
Montrer qu'il existe C tel que $I_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.

c'est pareil que
$\sqrt{n}\, I_n \sim C$
c'àd $\sqrt{n}\, I_n \longrightarrow C$

il faut montrer
que u_n converge

on sait que
$\sum_{n=1}^{N} \left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right)$ converge

$$= \cancel{\ln(u_2)} - \ln(u_1) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1)$$

$$+ \cancel{\ln(u_3)} - \cancel{\ln(u_2)}$$

$$+ \cancel{\ln(u_4)} - \cancel{\ln(u_3)}$$

$$\vdots \quad \cdots$$

$$+ \ln(u_{N+1}) - \cancel{\ln(u_N)}$$

(Série "télescopique" exple : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$)

Ainsi $\ln(u_{N+1}) - \ln(u_1)$ converge

Donc $\ln(u_N)$ converge aussi.

Donc $u_N = e^{\log(u_n)}$ converge, vers une limite C

Autrement dit $u_n = \sqrt{n}\, I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} C$

et on obtient $I_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$ quand $n \to \infty$

$I_n = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^n \, d\theta$.

1) Montrer que $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$ et que (I_n) décroît.

2) Montrer que $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$.

3) $I_{2n} = \pi \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ et $I_{2n+1} = 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

4) $I_{2n} \sim I_{2n+1} \sim I_{2n+2}$ puis $I_{2n}^2 \sim \frac{\pi}{n}$.