On a vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge

en utilisant une intégration par partie

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \underbrace{\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A}_{\text{on peut calculer}} - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt}_{\text{c'est absolu}^t\text{ convergent}}$$

(on majore $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$)

Feuille 5 - Ex.10
$\int_0^1 \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}dt$

On essaye le chgt de variable

$u = \frac{2}{t}$

ou $u = \frac{1}{t}$

Soit $f(t) = \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}$. La fonction f est définie et continue sur $]0,1]$.
Il faut étudier la convergence en 0 :
est-ce que $\int_\varepsilon^1 \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}dt$ converge quand $\varepsilon \to 0$?

rappel si $u = g(t)$ $du = g'(t)dt$

(1) Changement de variable.
On pose $u = \frac{1}{t}$. On a $du = \frac{-1}{t^2}dt$, ou encore $dt = -t^2 du = \frac{-1}{u^2}du$.
Quand $t = \varepsilon$, $u = \frac{1}{\varepsilon}$. Quand $t = 1$, $u = 1$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}dt = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 \cos(2u)u \cdot \frac{-1}{u^2}du$$
$$= \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\cos(2u)}{u}du$$

On est ramené à la variante de l'Ex.9.

transformer $\dfrac{\cos\left(\frac{2}{t}\right)}{t}$ pour faire apparaître une dérivée de $\sin\left(\frac{2}{t}\right)$

(ou qqchose qui ressemble)

$$\left(\sin\left(\frac{2}{t}\right)\right)' = -\frac{2}{t^2}\cos\left(\frac{2}{t}\right)$$

Feuille 5 - Ex.10

$\int_0^1 \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}dt$

$\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$

(2) Intégration par parties :

on peut aussi appliquer directement la méthode de la variante de l'Ex.9 :

$u = \frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{2}{t}\right)\right)$

$v = 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}dt = \int_\varepsilon^1 \underbrace{t}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{t^2}\cos(\frac{2}{t})}_{u'}dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[t(-\sin(\frac{2}{t}))\Big]_\varepsilon^1 + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \sin(\frac{2}{t})dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon \sin(\frac{2}{\varepsilon}) - \sin 2\right) + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \sin(\frac{2}{t})dt$$

On a $\varepsilon \sin(\frac{2}{\varepsilon}) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$

et, comme $\sin(\frac{2}{t})$ est bornée, $\int_0^1 \sin(\frac{2}{t})dt$ est convergente.

Donc $\int_\varepsilon^1 \frac{\cos(\frac{2}{t})}{t}dt$ a une limite quand $\varepsilon \to 0$.

Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$

selon les valeurs de α et β.

---

rappel pour $\gamma \in \mathbb{R}$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma}$ converge

si et seul^{t} si $\gamma < 1$

$$\frac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \frac{1}{x^\beta\left(x^{\alpha-\beta}+1\right)}$$

$\alpha - \beta < 0$

si on avait $\alpha - \beta > 0$ on aurait $x^{\alpha-\beta} \longrightarrow 0$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout intervalle compact de $]0, +\infty[$. Il faut étudier la convergence en 0 et $+\infty$.
Quitte à échanger α et β on peut supposer $\boxed{\alpha \leq \beta.}$

Convergence en 0 :

$\beta - \alpha \geqslant 0$

On a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x^{\beta-\alpha})}$.
Si $\beta > \alpha$ on a $x^{\beta-\alpha} \to 0$ quand $x \to 0$; si $\beta = \alpha$ on a $x^{\beta-\alpha} = 1$.
Donc, quand $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ $(\beta > \alpha)$ ou $f(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha}$ $(\beta = \alpha)$.

et même $f(x) = \frac{1}{2x^\alpha}$

On a aussi $f(x) > 0$ et $\frac{1}{x^\alpha} > 0$, donc, par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge.
D'autre part on sait que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Donc $\int_0^1 f(x)dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

(sous l'hypothèse $\alpha \leq \beta$)

En $+\infty$:

- Si $\alpha < \beta$, $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

- si $\alpha \leq 1$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge

  mais on ne peut pas conclure

- si $\alpha > 1$ on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge

  donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}\, dx$ —— aussi

Feuille 5 - Ex.12

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$

Convergence en $+\infty$:
On a $f(x) = \frac{1}{x^\beta(1+x^{\alpha-\beta})}$.
Si $\beta > \alpha$ on a $x^{\alpha-\beta} \to 0$ quand $x \to \infty$; si $\beta = \alpha$ on a $x^{\alpha-\beta} = 1$.
Donc, quand $x \to \infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^\beta}$ $(\beta > \alpha)$ ou $f(x) \sim \frac{1}{2x^\beta}$ $(\beta = \alpha)$.

On a aussi $f(x) > 0$ et $\frac{1}{x^\beta} > 0$, donc, par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$ converge.
D'autre part on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et $\beta > 1$.

sous l'hypothèse $\alpha \leq \beta$

$\lambda \in \mathbb{R}$

(1) Convergence.
Soit $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$. La fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc f est intégrable sur tout intervalle compact de $]0, +\infty[$. Il faut étudier la convergence en 0 et $+\infty$.

Convergence en 0 :
quand $x \to 0$ on a $1 + x^2 \to 1$ et $1 + x^\lambda$ tend vers 1, 2 ou $+\infty$ selon que $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$.
Donc $f(x)$ tend vers 1, $\frac{1}{2}$ ou 0 selon que $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$.

Dans tous les cas $f(x)$ tend vers une limite finie quand $x \to 0$ et $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

pour $x > 0$, on a toujours $x^\lambda > 0$

expl $\lambda = -1$, $1 + x^\lambda = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

Convergence en $+\infty$:
On a $1 + x^2 > x^2 > 0$ donc $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
et $1 + x^\lambda \geq 1$, donc $\frac{1}{1+x^\lambda} \leq 1$.
Donc $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$.

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.
Par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge aussi.

Finalement $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Feuille 5 - Ex.13

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$

Changement de variable $t = \frac{1}{x}$ dans $\int_\varepsilon^A \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} dx$.

$$\int_a^b \dots = -\int_b^a \dots$$

On peut écrire $x = \frac{1}{t}$, donc $dx = -\frac{1}{t^2} dt$.
Quand $x = \varepsilon$ on a $t = \frac{1}{\varepsilon}$, quand $x = A$ on a $t = \frac{1}{A}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} dx &= \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{A}} \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\lambda})} \Big(-\frac{1}{t^2} dt\Big) \\
&= \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{(t^2+1)(1+\frac{1}{t^\lambda})} dt \\
&= \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^\lambda}{(t^2+1)(t^\lambda+1)} dt
\end{aligned}$$

...

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx = \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^\lambda+1-1}{(t^2+1)(t^\lambda+1)}dt$$
$$= \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{t^2+1} - \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)}$$

Toutes ces intégrales convergent et on peut faire tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$.
Posons $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx$.
On a alors
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} - I$$
puis
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$