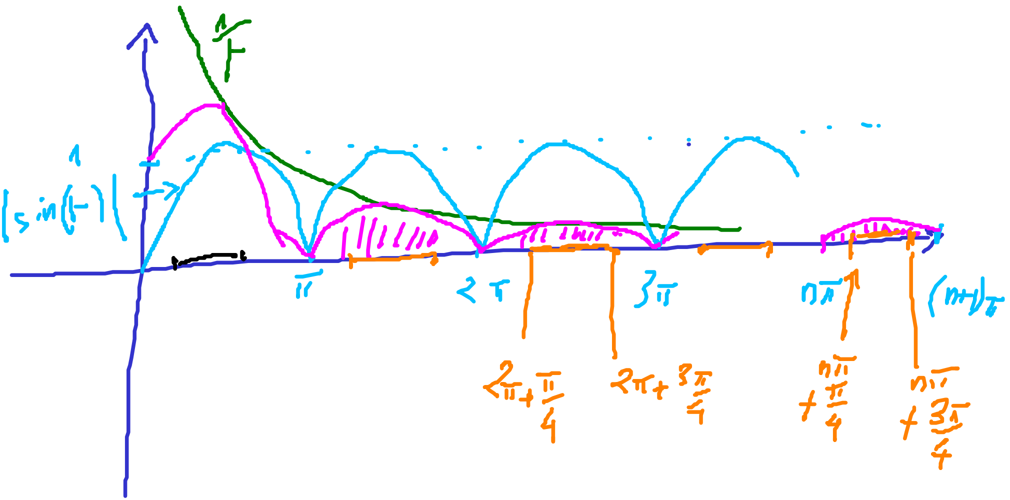


1/t
1
|sin(t)|
π
2π
3π
nπ
(n+1)π
2π + π/4
2π + 3π/4
nπ + π/4
nπ + 3π/4

On a vu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x} dx$ diverge. Ici presque le même résultat avec une autre méthode.
On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

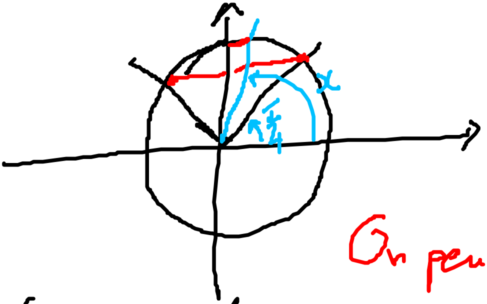
(1) Trouver $a > 0$ tel que $|\sin x| \geq a$ pour $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$:

On a $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

donc $|\sin(x+n\pi)| = |\sin(x)|$

et on peut supposer que $n = 0$:

il faut minorer $\sin(x)$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$



pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

on a

$\sin(x) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On peut prendre $\boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(autre solution : $\sin(x)$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(x) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Puis, pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ on a $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ avec $\pi - x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$)

Feuille 5 - Ex.9

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

(2) Trouver $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$:

Puisque $\frac{|\sin t|}{t} \geq 0$ et $[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}] \subset [n\pi, (n+1)\pi]$ on a

$$\begin{aligned}
u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt &\geq \int_{n\pi+\frac{1}{4}\pi}^{n\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\geq \int_{n\pi+\frac{1}{4}\pi}^{n\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{a}{t}\,dt \\
&\geq \int_{n\pi+\frac{1}{4}\pi}^{n\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{a}{(n+1)\pi}\,dt \\
&= \frac{a}{(n+1)\pi} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}_{(n\pi + \frac{3\pi}{4}) - (n\pi + \frac{\pi}{4})} = \frac{b}{n+1}
\end{aligned}$$

on a $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$

donc $0 < t < (n+1)\pi$

$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$

avec $b = \frac{a}{2}$.

constante (indépendant de t)

(3) En déduire que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge :

Pour un entier N on a

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \cdots + \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\
&= u_1 + u_2 + \cdots + u_N \\
&\geq b\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N+1}\Big)
\end{aligned}$$

Comme les sommes partielles $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$ tendent vers $+\infty$, on en déduit que la suite $\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ tend vers $+\infty$, donc diverge. En particulier $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

$f(t) = \frac{|\sin t|}{t}$

Plus précisément, comme $f \geq 0$, on a $\int_{\pi}^{x} f(t)dt \geq \int_{\pi}^{A(x)\cdot\pi} f(t)dt$ où $A(x)$ est la partie entière de $\frac{x}{\pi}$. Donc $\int_{\pi}^{x} \frac{|\sin t|}{t} dt \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Feuille 5 - Ex.9 variante

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Est-ce que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge ?

on pourrait voir que

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| > \left| \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \right|$$

et montrer que la suite

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

est une suite alternée

qui vérifie le critère des séries alternées ....

Ici on a d'autres outils :

$$\int_{T_1}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{T_1}^{x} - \int_{T_1}^{x} (-\cos t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$u' = \sin t$

$v = \frac{1}{t}$

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

$$= -\frac{\cos(x)}{x} - \frac{1}{T_1} - \int_{T_1}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

On a $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et on sait que $\int_{T_1}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

- Donc $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Donc $\int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2} dt$ a une limite quand $x \to +\infty$

- On a $\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Finalement $\int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$ converge quand $x \to +\infty$

Feuille 5 - Ex.10
$\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{\ln t} dt$

La fonction $f(t) = \frac{\cos t}{\ln t}$ est définie et continue sur $]1, +\infty[$, donc intégrable sur tout intervalle borné de $[2, +\infty[$. Il reste à voir la convergence en $+\infty$.

On essaye une intégration par parties pour augmenter la décroissance de l'intégrande.
Soit $A \geq 2$.

$$\int_2^A \frac{\cos t}{\ln t} dt = \left[\sin t \cdot \frac{1}{\ln t}\right]_2^A - \int_2^A \sin t \cdot \frac{(-1)}{t(\ln t)^2} dt$$
$$= \frac{\sin A}{\ln A} - \frac{\sin 2}{\ln 2} + \int_2^A \sin t \cdot \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$$

On a $\frac{\sin A}{\ln A} \to 0$ quand $A \to \infty$.

...

Comme ex. précédent

$\left(\frac{1}{\ln t}\right)' = \frac{-1}{t(\ln t)^2}$

absolument convergente

Feuille 5 - Ex.10

$\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{\ln t} dt$

On a $\left| \sin t \cdot \frac{1}{t(\ln t)^2} \right| \leq \frac{1}{t(\ln t)^2}$

et on sait que $\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$ est convergente.
Donc $\int_2^{\infty} \sin t \cdot \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$ est absolument convergente.

Autrement dit $\int_2^{A} \sin t \cdot \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$ a une limite quand $A \to \infty$.

Donc $\int_2^{A} \frac{\cos t}{\ln t} dt$ a une limite quand $A \to \infty$ (càd $\int_2^{\infty} \frac{\cos t}{\ln t} dt$ converge).

en général $\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$

Feuille 5 - Ex.10

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t-1)}{\ln t} dt$

- posons $u = t-1$
  quand $t \longrightarrow 1$ $(t>1)$ on a $u \longrightarrow 0$ $(u>0)$
- on a aussi $t = u+1$

$$\frac{\sin(t-1)}{\ln(t)} = \frac{\sin(u)}{\ln(1+u)}$$

- quand $u \to 0$ on a $\sin(u) = u + o(u)$
  donc $\sin(u) \sim u$
  et $\ln(1+u) = u + o(u)$ donc $\ln(1+u) \sim u$

Donc $\frac{\sin(u)}{\ln(1+u)} \sim \frac{u}{u} = 1$ quand $u \to 0$

Autrement dit $\frac{\sin(u)}{\ln(1+u)} \xrightarrow[u \to 0]{} 1$

(ou aussi $\frac{\sin(t-1)}{\ln(t)} \xrightarrow[t \to 1]{} 1$)

Donc on peut prolonger $f(t) = \frac{\sin(t-1)}{\ln(t)}$ par continuité en $t = 1$ avec $f(1) = 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge en 1. Et en $+\infty$ c'est comme l'exercice précédent

Feuille 5 - Ex.10
$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

La fonction $f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$

est continue sur $]0,1]$ et bornée

$\left(\left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq 1 \right)$.

Donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ est absolument

convergente, donc convergente.

Dans certains cas, la convergence se prouve de façon élémentaire :

Proposition 7.16. *Soit* $[a, b]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *et soit* f *une fonction continue par morceaux sur* $]a, b[$ *qui est bornée sur* $]a, b[$*, c'est-à-dire qu'il existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $|f(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in]a, b[$*. Alors* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *est absolument convergente.*

Démonstration : La constante M est intégrable sur $]a, b[$. Par comparaison, comme $|f|$ est positive, on a que $|f|$ est aussi intégrable sur $]a, b[$. La proposition précédente montre que f aussi est intégrable. $\square$

Exemple : La fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ est bornée et donc intégrable sur $]0, 1]$. Notons que cette fonction ne peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$, car $\cos(1/x)$ n'a pas de limite à droite en 0^+.