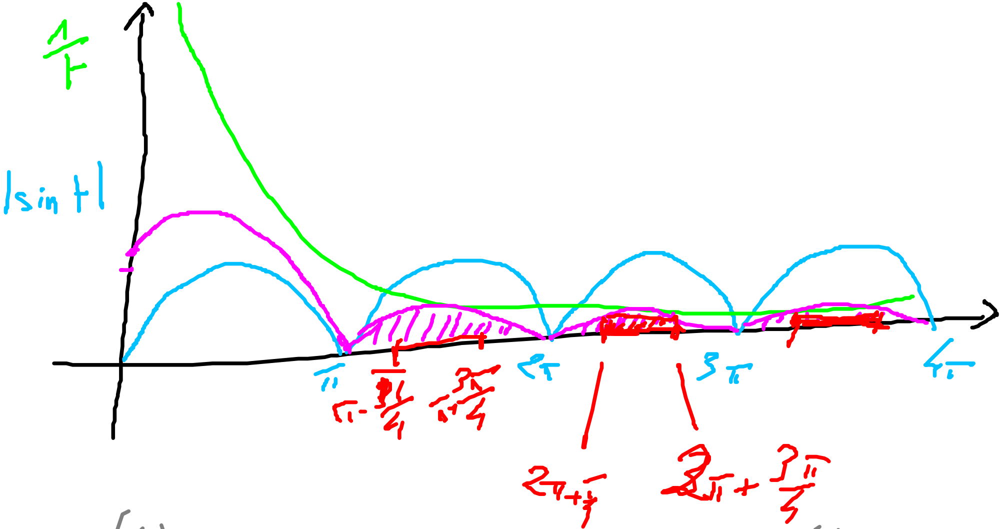


$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$$

$$\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$$

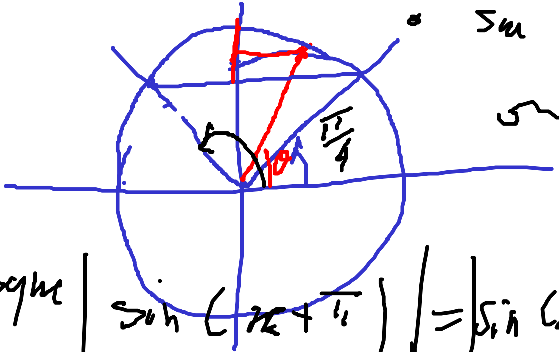
Feuille 5 - Ex.9

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

On a vu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x}dx$ diverge. Ici presque le même résultat avec une autre méthode.

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt$.

(1) Trouver $a > 0$ tel que $|\sin x| \geq a$ pour $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$:



• Sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

on a

$\sin(x) \geq \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• puisque $|\sin(x+\pi)| = |\sin(x)|$

on a encore $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$

. sin est $\nearrow$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

. Donc si $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

. Pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\sin(x) = \sin(\pi - x)$

avec $\pi - x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x \in \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$ cas 4

$|\sin(x)| = |\sin(x - n\pi)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) Trouver $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$:

Puisque $\frac{|\sin t|}{t} \geq 0$ et $[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}] \subset [n\pi, (n+1)\pi]$ on a

$$\begin{aligned} u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &\geq \int_{n\pi+\frac{1}{4}\pi}^{n\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &\geq \int_{n\pi+\frac{1}{4}\pi}^{n\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{a}{t} dt \\ &\geq \int_{n\pi+\frac{1}{4}\pi}^{n\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{a}{(n+1)\pi} dt \\ &= \frac{a}{(n+1)\pi} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}_{= \text{longueur de l'intervalle}} = \frac{b}{n+1} \end{aligned}$$

d'après (1) $|\sin(t)| \geq a$

$t < (n+1)\pi$

avec $b = \frac{a}{2}$.

Feuille 5 - Ex.9

$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$

(3) En déduire que $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge :

Pour un entier N on a

$$\begin{aligned}\int_\pi^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \int_\pi^{2\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \cdots + \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_N \\ &\geq b\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N+1}\Big)\end{aligned}$$

Comme la série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge, on en déduit que la suite $\int_\pi^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

plus exactement $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

En particulier $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

Plus précisément, on sait que $\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \to \infty$ quand $N \to \infty$. Donc $\int_\pi^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \to \infty$ quand $N \to \infty$.

Et, pour $f \geq 0$, on a $\int_\pi^{x} f(t)dt \geq \int_\pi^{A\pi} f(t)dt$ où A est la partie entière de $\frac{x}{\pi}$. Donc $\int_\pi^{x} \frac{|\sin t|}{t} dt \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

$$\therefore \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(n+1)\pi}\,dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \underbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,dt}$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{\pi} |\sin(t)|\,dt}_{=:\,b}$$

$$\geq \frac{b}{(n+1)\pi}$$

Ex 6

(1) nature de $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

a) $f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ définie et continue sur $]0,1]$

. Quand $t \to 0$, $e^{-t} \to 1$ donc

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$$

. On sait que $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge

. Par le thm de comparaison d'intégrales de fonctions positives en dessous, que $\int_0^1 f(t)\,dt$ diverge

b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

- Pour $t \geq 1$ on a $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$
- On sait que $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge.

Par comparaison . . . . $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge

(2) $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad x > 0$

. On vient de voir que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge donc $f(x)$ est défini.

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt}_{=\ell} - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

Par définition $\ell = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

Donc quand $x \to +\infty$

$f(x) \longrightarrow \ell - \ell = 0$

(3) Mq $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$

par intégration par parties

$$\int_x^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[-e^{-t} \cdot \frac{1}{t}\right]_x^A + \int_x^A e^{-t} \cdot \frac{-1}{t^2}\,dt$$

$\int u'v = [uv] - \int uv'$

essayons

$u' = e^{-t}$ $\quad u = -e^{-t}$

$v = \frac{1}{t}$

$$= \underbrace{\frac{-e^{-A}}{A}}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} 0} - \frac{-e^{-x}}{x} - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

Quand $A \longrightarrow \infty$ on obtient

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} - \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}_{g(x)}$$

Rest à montrer que

$$g(x) = O\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

ou que $g(x) = o\left(f(x)\right)$

Pour $\int_x^{+\infty} \cdots\cdots dt$, on a $t \in [x, +\infty[$

càd $t \geq x$ donc $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$

Donc

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \cdot \frac{1}{x} \cdot dt$$

"Constant"

$$= \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= \frac{1}{x} f(x)$$

Ainsi $g(x) \leq \frac{1}{x} f(x)$

Donc $g(x) = o\left(f(x)\right)$ qd $x \to \infty$

Puisque $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - g(x)$

on a par définition de $\sim$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$

. <u>Equivalence</u>

$f, g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

on dit $f(x) \sim g(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$

si $f(x) - g(x) = o(f(x))$

Lemme si $f(x) - g(x) = o(f(x))$

alors $f(x) - g(x) = o(g(x))$

rappel Si $f(x) \neq 0$,

alors $f(x) \sim g(x)$ si $\dfrac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

---

revenons sur

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} = g(x)$$

avec $g(x) = \frac{1}{x} f(x)$

on a $f(x) > 0$, donc $f(x) \neq 0$

d'où

$$1 = \frac{\frac{e^{-x}}{x}}{f(x)} - \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\leq \frac{1}{x}$$

donc quand $x \to \infty$ on obtient

$$\frac{\frac{e^{-x}}{x}}{f(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

(4) $$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

Mq $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

---

intégration par parties (sur $[x,1]$)

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\ln(t)\,e^{-t}\right]_x^1 - \int_x^1 \ln(t)\left(-e^{-t}\right)dt$$

$$\int u'v = [uv] - \int uv' \qquad u' = \frac{1}{t}$$

$$= \underbrace{\ln(1)e^{-1}}_{=0} - \underbrace{\ln(x)e^{-x}}_{\underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x}\right)} + \int_x^1 \ln(t)e^{-t}\,dt$$

quand $x \to 0 \qquad e^{-x} \longrightarrow 1$

donc $\dfrac{\ln(x)e^{-x}}{\ln(x)} \longrightarrow 1$

càd $-\ln(x)e^{-x} \sim -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Comportement de $\int_x^1 \ln(t)\, e^{-t}\, dt$:

Est-ce que $\int_0^1 \ln(t)\, e^{-t}\, dt$ converge ?

Quand $t \to 0$ on a $e^{-t} \to 1$

donc $\ln(t)\, e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t)$

on sait que $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge

Par le thm de comparaison ... (fonction ≥ 0)

on a $\int_0^1 \ln(t)e^{-t}\,dt$ converge

On a obtenu

$$h(x) := \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\ln(x)e^{-x} + \int_x^1 \ln(t)e^{-t}\,dt$$

avec $\int_x^1 \ln(t)e^{-t}\,dt$ converge vers une limite ℓ' quand $x \to 0$

Donc $\frac{h(x)}{-\ln(x)} = e^{-x} - \frac{1}{\ln(x)}\int_x^1 \ln(t)e^{-t}\,dt \longrightarrow 1 - \text{“}\frac{\ell'}{\infty}\text{”} = 1$

Ainsi $h(x) \sim -\ln(x)$

Revenons à $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

on a

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= h(x) + a$$ où on a posé $a = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

Donc $\frac{f(x)}{-\ln(x)} = \frac{h(x)}{-\ln(x)} - \frac{a}{\ln(x)}$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 1 - 0 = 1$$

Donc $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$